

論數學遊戲

張維忠

摘要: 從廣義上來說, 數學是一種遊戲, 然而這種遊戲要涉及到科學、哲學、藝術等更廣泛的人類文化範圍, 從而使數學成為人類文化的基本支柱之一。從狹義上來說, 數學中的遊戲則是指那些具有娛樂和消遣性質的並帶有數學因素的遊戲和趣題。數學遊戲具有一定的教育價值, 突出表現在: 遊戲是學生獲得數學內容與思想方法的有效方法之一, 遊戲有利於學生數學思維的培養, 遊戲還可以培養學生正確的數學態度。

關鍵詞: 數學遊戲, 趣題, 教育價值。

人們經常玩遊戲和作趣題。有關遊戲起源的書籍中曾列舉了許多古代遊戲的例子, 這些遊戲至今人們仍在玩。圖 1 採自公元前1200年的一本埃及紙草紙文稿。它是一頭山羊和一頭獅子在玩塞納特 (senet) 遊戲的畫。塞納特是那時最流行的遊戲之一, 全社會所有各界的人都玩。可惜關於到底怎樣玩法, 沒有留下文獻記錄, 但是利用考古學家的發現和他們的工作, 塞納特的一種可能的玩法已經被設計出來。^[1] 數學與遊戲作為兩項人類的活動在許多方面有共同的特點, 下面在闡述數學是一種遊戲的觀點基礎上, 首先論述遊戲對數學發展的影響, 其次給出幾則典型的數學遊戲與趣題, 最後著重探討數學遊戲的教育價值。



圖1. 遊戲幽默畫

1. 數學: 一種遊戲

一般認為, 遊戲是一個廣泛的概念, 它包括任何一種旨在消遣時光或尋求娛樂的活動。事實上, 談到遊戲, 通常人們的反應就是娛樂。的確, 遊戲首先是用來玩, 用來娛樂大眾的。遊戲本身就是文娛活動的一種, 分為智力遊戲和活動性遊戲。前者是發展智力的, 後者是發展體力的。而數學則是帶有藝術風度的智力工作, 同時是具有巨大的實用價值的科學。數學家在從事研究

時一般不是戲謔的，嚴謹和認真是人們對數學的一種追求。可是大多數人並不認為數學與遊戲有什麼聯繫。然而，遊戲卻是數學的重要組成部分。許多數學思想的發展是一個人鏗而不捨地思考一個令人迷惑的概念或問題的結果。有些人似乎在一種無形動力的驅使下可以就一些問題連續工作幾小時，他們屬於那些生來就喜歡數學並且對數學著迷的人們。他們會花費幾小時甚至幾天的時間去探究那起初從表面上看來不過是消遣而已的東西，直至細枝末節，以求得徹底理解。正如歷史所證明的：問題、挑戰、遊戲和消遣有時會導致重大的數學發現，甚至導致新數學領域的開拓。

進一步考察一下數學與遊戲的關係，我們發現遊戲與數學的關係非常密切，無論從數學知識本身，還是數學活動的過程以及人們從事數學活動的動機、方法等方面都可發現遊戲的因素。一方面，就數學知識本身來說，在傳統數學領域和現代數學領域中都可發現大量賞心悅目的具有遊戲性質的內容和問題。如畢達哥拉斯(Pythagoras, 公元前572-前500)學派對於完全數和親和數等數字的奇特性質的研究，古希臘人研究的角的三等分、倍立方和化圓為方三大幾何作圖問題，對割圓曲線等奇異曲線的研究、用相同形狀的圖形鋪滿整個平面的問題，以及在微積分中人們對大量種類的奇形怪狀的曲線的研究顯然都帶有娛樂的性質。另一方面，數學作為人類的一項活動，自古以來一直是一個享有特權的人類智力活動領域，被看成是人類智力的象徵。事實上，許多人不單是因為數學有用而研究數學，他們的出發點則是把數學作為一種自娛自樂的遊戲，一種高級的心理追求和精神享受。這種數學即遊戲的觀念在19世紀數學變成為一種職業以後仍然在發揮作用，實際上這種觀念一直持續到現代。著名數學家哈代(Godfrey Harold Hardy, 1887-1947)就曾說過，激勵數學家做研究的主要動力是智力上的好奇心，是謎團和吸引力。可以說數學在其成長和發展中一直伴隨著遊戲的精神。

一些社會學家曾對遊戲進行了深入的分析，認為以下性質是遊戲的基本特徵^[2]：

遊戲是一種“自由活動”。“自由”在希臘語中意思是“無報酬的”，也就是說活動本身的目的為是為了鍛煉，而不是從中獲取利益。同時這種“自由”還表現在遊戲者自由地安排和規劃遊戲活動本身，不受外在各種力量的支配；以及遊戲者心理的輕鬆性。

遊戲在人類的發展中起著“一定的作用”。幼兒就像小動物一樣玩耍，並為將來的競爭和生活作準備。成年人也玩遊戲，且通過遊戲體驗到解放、回避和放鬆等感覺。

遊戲是嚴肅的，遊戲“不是玩笑”。做遊戲必須相當認真，不認真對待遊戲的人是在糟蹋遊戲。正是遊戲中的嚴肅才使得遊戲完整。

遊戲是合作的。遊戲的合作就像談話一樣，“處於談話中意味著超越自己，和他人一起思考。”這一方面是說，一個人的遊戲是沒有的，即便是單獨一個人，如果他在遊戲的話，也總是有一個假想的夥伴；另一方面，更為普遍的集體遊戲總是行進在主體間的一致中，止步於主體與主體之間的對抗中。

遊戲就像藝術工作一樣，“通過深思熟慮和實施而產生樂趣”。

遊戲在時間與空間上“和日常生活分開”。

遊戲中包括“一定的緊張因素”，通過渲泄與解放而產生巨大的樂趣。

遊戲可使參加者之間產生兄弟般的“特殊默契”。

通過遊戲規則可創造一種“新秩序”和充滿和諧韻律的新生活。

粗略地分析一下數學作為人類的一項活動，我們可以在許多形式中都發現所有這些特點。事實上，從廣義上來說，數學的確是一種遊戲，然而這種遊戲要涉及到科學、哲學、藝術等更廣泛的人類文化範圍，從而使數學成為人類文化的基本支柱之一。從狹義上來說，數學中的遊戲則是指那些具有娛樂和消遣性質的並帶有數學因素的遊戲和趣題。

2. 遊戲對數學發展的影響

遊戲對數學的發展影響深刻。首先，遊戲激發了許多重要數學思想的產生。數學史上經常出現這種情況，一個像遊戲似的有趣問題，或是對一個表面看來無關緊要的情境作巧妙觀察，會產生新的思維模式。當人們能以自願而嬉笑的心境，而不是以正式的科學常有的嚴肅認真的背景來看待一門學科時，這種精神就能使科學有效地取得進展。人們談到組合分析的起源時，就會講到「易經」中以不同占卦符號的分佈以及具有神秘內涵的中國魔方、縱橫圖的構造等。畢達哥拉斯學派用石塊的遊戲列出了數論中有趣的定理。概率論就直接起源於一個關於賭博的遊戲。它把純粹偶然事件的表面上的無規律性置於規律、秩序和規則之下，從而成為人類的根本知識之一，並具有廣泛應用價值。正如拉普拉斯 (P. S. Laplace, 1749-1827) 所說：“這門起源於靠運氣取勝的遊戲的科學，竟然成了人類知識的最重要的一部分”。同樣圖論也是一門起源於遊戲的科學，它起源於歐拉 (L. Euler, 1707-1783) 關於哥尼斯堡七橋問題的研究。此後許多著名的數學遊戲成為圖論和拓撲學發展的催化劑和導引，如哈密頓 (W. R. Hamilton, 1805-1865) 問題 (繞行世界問題)、四色猜想問題等。

其次，數學遊戲還為其他許多古老和新興的學科，如概率論、博弈論、規劃論、組合數學、圖論、拓撲學、代數學等提供了素材，促進了這些學科的誕生和發展。阿基米德 (Archimedes, 公元前 287-前 212) “群牛問題”和中國的“百雞問題”促進了不定方程理論的發展；柯克曼女生問題的求解導致組合數學的深入；哥尼斯堡七橋問題直接引起圖論的創立，並對網絡理論和拓撲學的建立起了促進作用；“合理分配賭注問題”成為概率論創始的基本問題之一；18世紀出現的“蒲豐 (Comte de Buffon, 1707-1788) 投針問題”開創了幾何概率的先河；“翻攤 (Nim)”等博弈遊戲為對策論提供了素材，並對人工智能的發展有一定影響；哈密頓周遊世界難題與圖論中的大量問題有關。幻方作為一種古老的數學遊戲，不僅僅是拼湊數字，它與由“三十六軍官問題”引出的正交拉丁方理論一樣，都是古老數學智慧的體現，在實驗設計，特別是正交設計中煥

發出新的光彩，得到廣泛的應用。1930年，英國農學家利用正交拉丁方設計小麥實驗方案獲得成功，使拉丁方理論得到數學界的普遍重視。

第三，遊戲還促進了數學知識的傳播。遊戲之所以具有難以抗拒的魅力的一個很重要的原因是遊戲所涉及的問題和內容有趣迷人、淺顯易懂。另外又不需要過多的預備知識，只要掌握一般的基本知識，初學者即可登堂入室，理解某一門學科的許多的重要內容。因此數學遊戲常被用來作為嚴肅數學的一種表現方式，使之更易理解和更具趣味。遊戲在數學普及和傳播中的有效性一直伴隨數學的成長和發展過程。在人們津津樂道、相互傳誦遊戲的過程中，也將有關的數學知識和數學思想傳送給四面八方的人。事實上，一些經典數學遊戲就作為數學理論的載體，歷經千年而不衰，始終煥發著極強的生命力，成為傳播數學的重要手段。而數學遊戲吸引人之處也在於，它以淺顯易懂又妙趣橫生的語言引出深奧的數學原理和數學思想。這時，數學遊戲的表達方式就成為決定這個遊戲是否具有生命力的重要因素。斐波那契 (Leonardo Fibonacci, 約 1170-約 1240) 兔子問題以小兔生子作載體，使這個問題親切有趣，得以流傳至今。而導致同樣數學結果的其他類似表述，如登樓梯問題，蜜蜂進蜂房問題，樹枝分叉問題等，雖然得到的都是斐波那契數列，但相比於兔子問題，在趣味性方面就遜色許多，未能廣泛流傳。兔子問題則成為一個經典問題，直到今天仍為許多人矚目。

第四，遊戲還是數學人才發現的有效途徑。數學發展史上許多數學家是由於解決了某個遊戲而發現自己具有數學潛能，從此放棄其他選擇而獻身數學。如數學家高斯 (C. F. Gauss, 1777-1855) 就是由於在他 19 歲那年解決了一個長期困擾數學界的、帶有遊戲色彩的幾何作圖難題——用尺規作出了一個正十七邊形，這一成功使他對自己的數學才能有更加明確的認識，於是，他毅然放棄了自己所喜愛的語言學而投身於數學。此外還有萊布尼茨 (G. W. Leibniz, 1646-1716)、馮·諾伊曼 (John von Neumann, 1903-1957) …… 遊戲成為自我檢驗數學才能的試金石。^[3]

3. 一些數學遊戲與趣題

3.1. 七巧板

早在一千多年以前，我國就出現了一種廣泛流傳於民間的數學遊戲——七巧板。七巧板是我國傳統兒童玩具，是家喻戶曉的益智遊戲，像吃粽子、吃湯糰那樣是我們中國人特有、固有的，是正宗的中國玩意。它是我們的祖先運用面積的分割和拼補的方法，以及有相同組成成份的平面圖形等積的原理研究並創造出來的。

七巧板是由尺寸互相關聯的一對大直角三角形、一對小直角三角形、一個中直角三角形、一個正方形和一個平行四邊形所組成的 (如圖 2)。

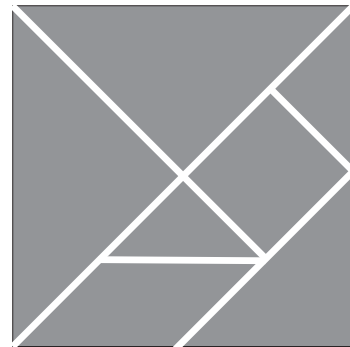


圖 2. 七巧板

“七巧板”的製作步驟如下：

- (1) 在所選材料 (如薄紙板) 上畫出一個正方形 $ABCD$, 並作出它的對角線 AC (如圖3)。
- (2) 分別找出 AB 和 BC 的中點 E, F , 連接 EF (如圖4)。
- (3) 過 D 作 EF 的垂線使之與 AC 相交於 H , 與 EF 相交 G (如圖5)。
- (4) 過 G 作 $GL//FC$, 過 E 作 $EK//GH$ (如圖6)。

最後, 沿圖中所做的線段依次進行分割, 即得七巧板。^[4]

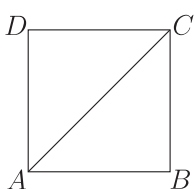


圖3.

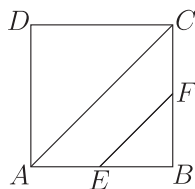


圖4.

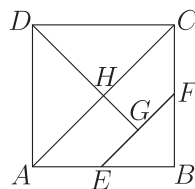


圖5.

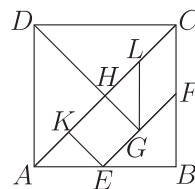


圖6.

七巧板的流行大概是由於它結構簡單、操作容易、明白易懂的緣故。你可以用七巧板隨意地拼出形狀不同的花鳥蟲魚、走獸牲口、工具器用、舟車人物, 惟妙惟肖 (圖7就是用七巧板拼成的圖形樣例)。但如果你想用七巧板拼出特定的圖案, 那就會遇到真正的挑戰。因為它那簡單的結構, 很容易使人誤認為要解決它的問題也很容易。用七巧板拼出的圖案超過1600種, 「歷史數學名題賞析」分類選擇了一些有趣的圖樣以供讀者欣賞。^[5] 其中有些是容易解決的, 另一些卻相當詭秘, 還有一些則似是而非, 充滿了矛盾。用七巧板還可拼成等腰三角形、長方形、平行四邊形、直角梯形、等腰梯形、五邊形、六邊形等幾何圖形。這是小學生另一種圖形變換的練習——等積變換, 而且蘊含出入相補原理這一重要幾何命題。用七巧板拼成各種有趣的圖樣, 能夠給人們帶來有益的知識, 同時, 拼圖對於鍛煉人們的智力和培養人們的思維想像能力、審美觀點 (情趣) 是十分有益的; 甚至在今天這種數學遊戲仍具有很高的品位 (比如已做成了遊戲機軟體)。七巧板作為一種平面拼圖遊戲, 它還可用作兒童啓蒙教育, 可以增強學生的注意力, 鍛煉識別圖形的能力, 因此可以列入教學計劃之中。七巧板不僅是一種智力遊戲玩具, 還可以作為研究課題深入探討, 廣泛應用於各種學科, 如設計師可用它設計商標, 心理學家可用它搞心理測驗, 教師可用它改進圖形識別訓練, 以提高教學質量。這樣從簡單的拼板遊戲到心理學的試驗都有它的用武之地。



圖7. 七巧板拼成的圖形詳例。

七巧板流傳到歐、美大陸，他們稱之 tangram(唐人圖)。李約瑟 (J · Needham, 1900-1995) 曾指出：“另一種幾何玩具是一套有多種排列的木板 (一塊正方形，一塊菱形和五塊大小不同的三角形)，據說它是‘東方最古老的消遣品’之一。中國人稱之為‘七巧圖’。歐洲人稱為‘唐人圖’。這與幾何分割、靜態對策、變位元鑲嵌等學科有關，也與多少世紀以來中國建築師用在窗格上的豐富的幾何圖案有關。”^[6] 蘇聯趣味數學專著也一再介紹這種遊戲。直至20世紀80年代還有人對它的數學原理、性質又進行探討，得出許多結論。例如“一副七巧板只能拼在13種不同的凸多邊形”等。

還有曲線七巧板。圖8(1) 是曲線七巧板的形狀。圖8(2) 示作法。作 OA 的中垂線 MN 交圓周於 H 。以 H 為心、 OH 為半徑作弧 OA ，類似地作出弧 OD, OC, OB 。取弧 AB 的中點 E ，以同樣半徑作出弧 OE 。 F, G 是弧 CD, DA 的中點。作出與原圓周對稱的弧 CF, DG 。於是圓 O 被分成 $1 \sim 7$ 曲邊形。圖9是用這種曲線七巧板搭成的動物圖形：馬、蝴蝶、魚、鳥等。

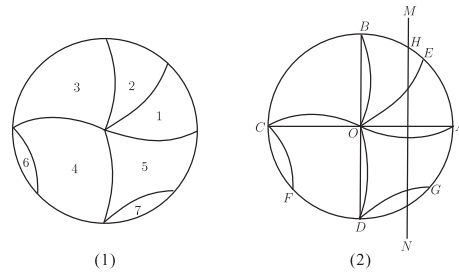


圖8.



圖9. 曲線七巧板搭成的圖形。

進一步，我國民間還流傳著一種立體七巧板，它是由圖10所示的七塊立體圖形組成。用立體七巧板也能拼成各種立體圖形，例如圖11就是用立體七巧板拼成的一個 $3 \times 3 \times 3$ 的正方體，你還有不同的拼法嗎？

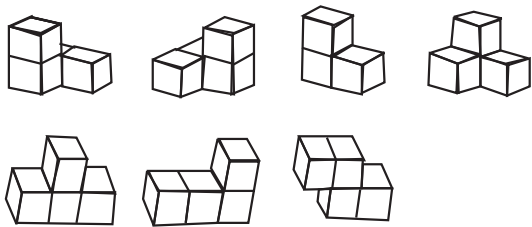


圖10

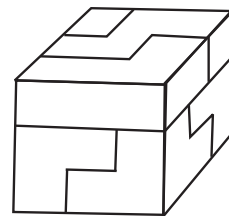


圖11

3.2. 折紙

折紙的對象是一個正方形的紙張，因為它與矩形和其他四邊形相比，它有四條對稱軸；而雖然圓和有些正多邊形有更多的對稱軸，但他們又缺少正方形所擁有的直角，這就使製作上造成了較大的困難。有時人們也用其他的紙張作為折紙的開始，但純粹從正方形開始的作品是不用膠水和剪刀的。折紙的對象被創造出來後，留在正方形的紙張上的折痕，揭示出大量幾何的對象和性質：相似、軸對稱、中心對稱、全等、相似形、比例、以及類似於幾何分形結構的疊代（在圖案內不斷地重復圖案）。折紙的過程也極具啓發性：人們開始用一個正方形（二維物體）的紙張來折一個立體（三維物體），如果折出了新的東西，那麼折紙的人就把這個形體攤開，並研究留在正方形紙上的折痕。這個過程包含了維數的變動。折痕表示物體在扁平面（即正方形）上的二維投影。而一個二維物體到三維物體，又回到二維，這就跟投影幾何發生了關係。^[7] 用折紙解決一些數學問題更是妙不可言，從下面的例子可略見一斑。

例：一張紙上畫有半徑為 R 的圓 O 和圓內一定點 A ，且 $OA = a$ 。折疊紙片，使圓周上某一點 A' 剛好與 A 點重合，這樣的每一種折法都留下一條直線折痕，當 A' 取遍圓周上所有點時，求所有折痕所在直線上點的集合。

參考答案給出的解法相對繁鎖，而用折紙解更為簡捷。

由折法知， A' 、 A 兩點關於折痕所在直線 l 對稱（如圖 12），即 l 線段 AA' 的垂直平分線。連結 OA' 交 l 於 P ，則 $PO + PA = PO + PA' = OA' = R$ 。故點 P 在以 O 、 A 為焦點，長軸長為 R 的橢圓上。設 P' 是直線 l 上不同於 P 的任一點，則 $P' + P'A = P'O + P'A' < OA' = R$ 。所以，點 P' 在上述橢圓的外部。

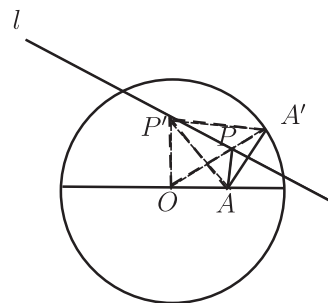


圖 12

故折痕所在直線 l 上點的集合為以 O 、 A 為焦點， R 長軸的橢圓上或外部。

3.3. 塔爾塔利亞趣題

16世紀的義大利數學家尼科洛·塔爾塔利亞 (N. Tartaglia, 約 1499-1557) 因發現一般三次方程的解 (1535) 而著名。他還寫了三卷本「數和度量專論」。此外，是他最先將歐幾裏得 (Euclid, 公元前 330-前 275) 的「幾何原本」翻譯成現代西方語言 (1543)。下面是他設計的一個很著名的數學趣題：

三對新婚夫婦來到河邊，有一隻小船可乘著過河，但是一次只能載兩人。每個丈夫都嫉妒成性，而且隨時要保護著他美麗的新娘。爲了圓滿解決問題，他們決定不讓新娘和別的男子在一起，除非由她的丈夫陪伴著。

這3對夫婦如何過河？最少的渡河次數是多少？

(參考答案：根據新娘在沒有丈夫陪伴時不許和別的男子在一起的規定，需要過河11次。如果記丈夫1爲 $H1$ ，妻子1爲 $W1$ ，以此類推，渡河步驟如下：(1) $H1$ 帶 $W1$ 過河後獨自返回—2次；(2) $W3$ 帶 $W2$ 過河後獨自返回—2次；(3) $H2$ 帶 $H1$ 過河後帶 $W2$ 返回—2次；(4) $H2$ 和 $H3$ 過河後 $W1$ 返回—2次；(5) $W2$ 和 $W3$ 過河， $H1$ 返回帶妻子過河—3次。)

4. 數學遊戲的教育價值

在希臘語中，遊戲 (paidia) 和教育 (paideia) 這兩個詞的詞根是一樣的，都指稱兒童 (pais) 的活動，這預示著二者關係的研究從沒有被教育研究者漠視過。柏拉圖 (Plato, 公元前427-前347) 是第一個研究二者關係問題的，渴望他言稱的教育包括遊戲成分，以遊戲幫助教育。亞裏士多德 (Aristotle, 公元前384-前322) 認爲遊戲是七歲以前兒童教育的一種方法。誇美紐斯 (J. A. Comenius, 1592-1670) 十分重視遊戲在學前教育中的意義，指出遊戲可以使兒童“自尋其樂，並可鍛煉身體的健康、精神的活潑和各種肢體的敏捷”。福祿倍爾 (F. Froebel, 1782-1852) 以遊戲作爲幼稚教育的基礎，認爲遊戲是童年生活中最快樂的活動，是表現和發展兒童的主動性和創造性的最好活動形式。成人既應允許兒童自由地盡情地遊戲，又必須注意觀察和指導兒童的遊戲，從而通過遊戲增進兒童的體力和智力，利用兒童與同伴的共同遊戲，培養公民意識和意志品質，進行道德教育。杜威 (J. Dewey, 1858-1952) 更是認爲“沒有一些遊戲和工作，就不可能有正常的有效的學習”，在學校這個環境裏，“遊戲和工作的進行應能促進青年智力和道德的成長。”^[8] 由此可見，遊戲的教育價值早已被教育家所認可。

事實上，有經驗的數學家開始對任何問題作研究時，總帶著與小孩子玩新玩具一樣的興致，先是帶有好奇的驚訝，在神秘被揭開後又有發現的喜悅。有什麼理由在我們的數學教育中不應使用同樣的遊戲似的精神呢？一本很好的數學遊戲選集能使任何水平的學生都從自己最佳的觀察點面對每一個題材。學生不僅學到了數學的內容，而且還體驗到了數學的思維方式，進而培養了學生正確的學習態度：創造、動力、興趣、熱情、樂趣……。對許多嚴肅數學題材採用遊戲似的方法，能使學生深深地受益，並且通過向學生說明面對數學問題如何持正確態度，可能會對學生今後一生對待各種數學問題的整個態度產生積極的影響。數學遊戲的教育價值是不容忽視的。

美國著名科普作家馬丁·加德納 (M. Gardner, 1914-) 曾在美國的著名科普雜誌「科學美國人」(Scientific American) 上主持過“數學遊戲”專欄 (Mathematical Game, 簡稱 M.

G, 正好與他姓名的縮寫完全吻合。難怪有人要說馬丁·加德納就是數學遊戲的人格化, 數學遊戲的化身了), 影響廣泛而又持久。百戲雜陳, 包羅萬象, 到處是連理枝, 到處有嫁接果。馬丁·加德納讀萬卷書, 行萬里路, 知識非常淵博, 才華橫溢, 思如泉湧, 博聞強記, 文理雙棲, 是一位名副其實的多產作家, 所創作的數學科普書與文章的總數累計達一千萬字以上, 內容幾乎涉及數學的方方面面, “熱點”之多, 令人目不暇接。他工作的特點是把許多數學思想或知識寓於各種有趣的故事和問題之中, 這些妙趣橫生的作品使數以百萬計的人陶醉於數學樂園之中。馬丁·加德納曾經對數學遊戲的教育價值作了如下相當正確的評價: “喚醒學生的最好辦法是向他們提供有吸引力的數學遊戲、智力題、魔術、笑話、悖論、打油詩或那些呆板的教師認為無意義而避開的其他東西。”事實上, 努力通過數學的應用, 數學的歷史以及人們最感興趣的數學家的傳記, 通過其與哲學或與人類思想其他方面的關係來普及數學, 可以很好地使數學為更多的人所瞭解, 但可能沒有什麼方法能比精選的遊戲能更好地傳遞數學的精神了。因此, 數學遊戲的教育價值不容置疑。具體講數學遊戲在數學教育中有以下作用。

遊戲是學生獲得數學內容與思想方法的有效方法之一。因為遊戲為不同年齡層次的學生提供了這樣的機會——通過具體的經驗去為今後所必須學習的內容作準備。如“算24點”遊戲, 小學一年級可玩“加減法”, 二年級加進“簡單的乘除”和“兩步以內混合運算的內容”, 三、四年級可進行複雜的四則運算, 五年級可出現“小數的乘除”, 六年級則有“分數的四則運算”和“指數運算”。又如猜數遊戲(甲: 我想了一個兩位數, 你猜猜是多少? 乙: 這個數比50大嗎? 甲: 對。乙: 比70小嗎? 甲: 對。乙: 比60大嗎? 甲: 不對。乙: 比56大嗎? ...) 使學生在體會數的大小的同時, 便會學到一種解決問題的有效策略, 其中包含著樸素的用“區間套”逐步逼近的思想。再如折紙遊戲, 不論是在平面幾何或是立體幾何課堂上適當引入折紙是行之有效的教學手段。觀察、比較和分析折紙中的數學現象, 有利於提高學生的感性認識和空間想象能力。

一些遊戲與數學的結構相似。如某些棋類或字母遊戲提供了公理系統的體驗, 從而使遊戲成為學生從具體過渡到抽象數學證明的橋梁; 電腦遊戲可以發展幾何的空間感覺和意識等。從而, 使學生更深刻地理解數學的精神, 保證了遊戲有利於學生數學思維的培養。事實上, 數學遊戲作為智力遊戲的一種, 在啟發人的創造性思維方面有重要的作用。有許多遊戲看似複雜, 用常規方法也許需要耗費大量的精力, 但若能放開思路, 打破常規, 靈機一動, 從另一個角度去考慮, 就可能事半功倍, 得到一種簡潔而優美的解法。這種思維方式是解決數學遊戲的一種重要方法, 同時數學遊戲也鍛煉了人的這種思維能力。例如著名的軌跡問題——“四臭蟲問題”, 現以烏龜為例, 扼要地概括為: 一個正方形四角上有四隻烏龜, 每隻都在朝右邊的那隻爬去, 速度相等, 因而每一時刻它們都處於一個正方形的四角上, 隨著正方形的旋轉, 面積越來越小, 設每隻龜以1釐米/秒等速爬行, 正方形邊長3米, 問需要多長時間四隻烏龜才能在中心碰頭? 這四隻烏龜爬行的路線是對數螺線, 用對數螺線求解需要高等數學的知識, 而有一種妙不可言的簡潔解法, 可

以立刻算出烏龜的爬行時間是5分鐘。考慮一隻烏龜，它的運行速度不變，運行方向與它要爬向的那只烏龜的運行方向始終成直角，這種情況恰如前者停在正方形一角，後者沿正方形一邊向它爬去。這是解題的關鍵。由於邊長是300釐米，烏龜速度為1釐米/秒，所以需要300秒即5分鐘。這種解法不需要艱深的數學知識，淺顯易懂，很有代表性。許多數學遊戲的求解均是如此，若用按部就班的方法來解，需要深厚的數學基礎和大量的時間，但是如果巧動腦筋，深入分析一下遊戲的原理，就有可能想出一個簡單明瞭的解法。追求解題方法的優美簡潔，也是所有數學家的目標，數學遊戲問題的解法常常獨闢蹊徑，可謂“山重水複疑無路，柳暗花明又一村”，這就極大地活躍了人的思維，擴展了解決數學問題的方法。

遊戲還有利於學生的數學發現。例如有兩個有序數組： $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ 及 $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ ，則有 $a_1b_n + a_2b_{n-1} + \dots + a_nb_1 \leq a_1c_1 + a_2c_2 + \dots + a_nc_n \leq a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ ，其中 c_1, c_2, \dots, c_n 是 b_1, b_2, \dots, b_n 的任意一個排列。這個不等式即排序不等式。儘管排序不等式是高中數學競賽的內容，似乎不適合初中生學習，但若以學生熟悉的“剪刀、石頭、布”這個遊戲活動為平臺，以五個逐漸深入的問題為線索，通過活動—記數—代數表示—計算—收集資料—數值排序—分析資料—由特殊到一般的歸納猜想，初一的學生也可以發現這一排序原理。下面是何小亞老師給出的具體化教學設計方案。^[9]

先介紹“剪刀、石頭、布”的遊戲規則：(1) 遊戲在同桌的兩位同學之間進行。我們用伸出拳頭表示石頭，伸出食指和中指表示剪刀，伸出手掌表示布。兩人同時口念“剪刀，石頭，布”，一念到“布”時要同時出手。規定布贏石頭，石頭贏剪刀，剪刀贏布。(2) 用符號“正”記載贏的次數，如“一”、“丁”、“正”、“正一”、“正丁”分別表示贏1、2、5、6、7次，等等。

弄清規則後，學生就可以開始玩“剪刀、石頭、布”的遊戲。玩的時候，請在表1中按“一、丁、下、…”的方式把每一次贏的結果累計入相應的贏法。一共玩21次。最後，要將每人每一種贏法的次數統計出來並寫在相應的格子裏。

表1

次數 遊戲者學號	三種贏法			每人贏的 總次數
	布贏石頭	石頭贏剪刀	剪刀贏布	

我們約定：布贏石頭得9分，石頭贏剪刀得5分，剪刀贏布得2分。

問題1：你的得分是多少（要求列出式子）？

問題2: 如果某個遊戲者的遊戲結果如表2所示, 那麼該遊戲者一共得了多少分? 請你用代數式把其得分表示出來。

表2

	布贏石頭	石頭贏剪刀	剪刀贏布
贏一次得分	9	5	2
贏的次數	x	y	z

問題3: 請收集全班遊戲結果的資料, 並把他們列成表3。

表3

三種贏法	布贏石頭	石頭贏剪刀	剪刀贏布	每人贏的	每人的
贏一次得分	9	5	2	總次數	總次數
每種贏法的次數	x	y	z		$S=$
遊戲者學號					
...

資料收集齊全之後, 請你研究總得分 S 的大小與 x, y, z 的大小有什麼關係。為什麼那些贏的總次數一樣多的同學們的分數相差那麼大呢?

問題4: 全班同學們的 x, y, z 中有沒有出現象 3、2、5 或 2、3、5 或 5、3、2 這種數位完全一樣但順序卻不一樣的情況? 假設有這種情況, 他們的得分大小與那三個數位的大小排列順序有何關係?

問題5: 更一般地, 對於給定的兩組正數 m, n, p 與 x, y, z , 它們的對應乘積和 $S = mx + ny + pz$ 的大小與這兩組正數的大小排列有什麼關係? 你能作出什麼大膽的猜想嗎?

問題6: 觀察你手頭收集到的全班遊戲結果的資料表3, 你還能從中提出什麼問題?

(上述活動達到下面的目的: 鞏固用符號“正”進行記數, 以及用數值排序處理資料的方法; 會用線性函數 $f(x, y, z) = 9x + 5y + 2z$ 表示總分; 通過資料的收集、分析, 處理, 猜想出排序原理; 經歷“實驗—收集資料—分析資料—處理資料—歸納猜想—驗證”這一解決問題的過程與思想方法; 培養了學生發現問題和提出問題的意識。)

遊戲還可以培養學生對數學經久不衰的興趣與正確的數學態度。一方面, 遊戲是培養好奇心的有效方法之一, 這是由遊戲的性質決定的——趣味性強、令人興奮、具有挑戰性等。好奇心又為探索數學現象的奧秘提供了強大的動力。另一方面, 遊戲還可以培養學生養成勇於創造

的研究態度。數學遊戲不僅僅是培養學生直接興趣，即對遊戲本身的興趣，而是還要培養學生的間接興趣——一種對數學經久不衰的興趣。這將有助於提高學生的觀察能力，培養學生良好的數學思維習慣，逐步培養學生對數學的鑽勁和韌勁，從而享受數學帶來的持久樂趣。例如“移棋子”的遊戲：取3枚白棋子和3枚黑棋子，左邊放3枚白的，右邊放3枚黑的，挨著排成一行（如圖13中的第0行）。規定每次可取出相鄰的兩子，但不能變動兩子的先後順序，把它們移到同行的任何空位上。要求這樣移動3次，能把它們排成黑白相間的一行，也要各子緊挨著，不留空隙（形如圖13中第3行）。該怎樣移？（移法如圖14所示）



圖13

圖14

以上不妨稱“3對子”的情況。進而還可提出，如果是“4對子”應當怎樣移呢？（可按圖14的順序移動）

數學家已經證明了“5對子”移5次，“6對子”移6次... “ n 對子”移 n 次，都可由“黑白分明”移成“黑白相間”。於是學生隨著教師的引導，拾級而上，遊戲逐步深入。

這個數學遊戲可讓小學一至六年級的學生都學得樂趣無窮呢？原因是，它有簡易性（即題目要求人人能理解，棋子還可以用其他諸如石子、橡皮、豆子、穀粒來代替，教學中若有磁性黑板或圍棋掛盤，效果將更佳）、操作性（可以不分場合地進行）、探究性（要經過多次反復嘗試才能成功）和拓展性（從3對子、4對子、5對子到 n 對子無限拔高）。這樣，不同年齡階段的學生可以根據自己的智力水平達到不同的程度，同時又樂此不疲地向一個新的高度去“挺進”，因而它“魔力”無窮。

參考文獻

1. (美)T·帕帕斯，數學的奇妙，陳以鴻譯，上海：上海科技教育出版社，1999，264。
2. 唐瑞芬，李士錡等編譯，國際展望：數學教育評價研究，上海：上海教育出版社，1998，272-276。
3. 王幼軍，數學中的遊戲因素及其對於數學的影響，自然辯證法通訊，2002，24(2)，12-17。
4. 吳振奎，吳昊，數學中的美，上海：上海教育出版社，2002，275-277。
5. 沈康身，歷史數學名題賞析，上海：上海教育出版社，2002，1186-1200。
6. (英)李約瑟，中國科學技術史（第三卷 數學），北京：科學出版社，1978，249-250。
7. (美)T·帕帕斯，數學趣聞集錦（下），張遠南，張昶譯，上海：上海教育出版社，243-244。
8. 鄧友超，“教學如遊戲”論綱，華東師範大學學報（教育科學版），2003，21(1)，16-18。
9. 何小亞，從“剪刀、石頭、布”遊戲中提出數學問題，數學教學，2003(2)，31-32。

—本文作者現為浙江師範大學數理學院教授，博士—