數學傳播 48卷1期, pp. 101-106

平面等角多邊形的一個有趣性質

吳　波 · 郭子偉

在“悠閒數學娛樂論壇”上 kuing (本文第二作者) 的一個帖子 (見 `http://kuing.orzweb.net/viewthread.php?tid=6201&extra=page%3D5`) 中有如下兩個類似的幾何題:

命題1: 如圖 1, 正三角形 $\triangle A_1A_2A_3$ 內一點 P 在三邊上的正投影分別為 P_1、P_2、P_3, 則

(i) $A_1P_1+A_2P_2+A_3P_3=P_1A_2+P_2A_3+P_3A_1$;

(ii) $S_{\triangle PA_1P_1}+S_{\triangle PA_2P_2}+S_{\triangle PA_3P_3}=S_{\triangle PP_1A_2}+S_{\triangle PP_2A_3}+S_{\triangle PP_3A_1}$.

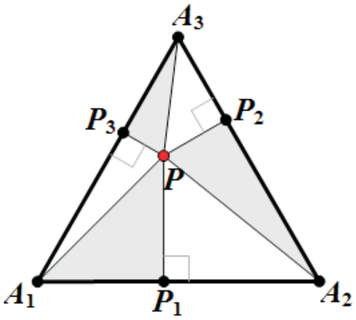

圖1

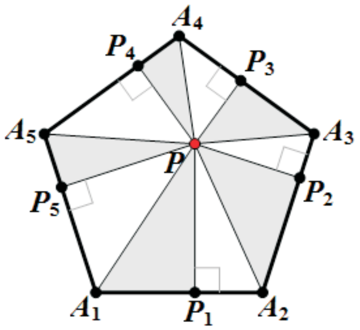

圖2

命題2: 如圖 2, 正五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 內一點 P 在各邊上的正投影分別為 P_1、P_2、P_3、P_4、P_5, 則 (約定 $A_6=A_1$)

$$\text{(i)}\quad \sum_{i=1}^{5}A_iP_i=\sum_{i=1}^{5}P_iA_{i+1},\qquad \text{(ii)}\quad \sum_{i=1}^{5}S_{\triangle PA_iP_i}=\sum_{i=1}^{5}S_{\triangle PP_iA_{i+1}}.$$

將結論 (i) 中的有向線段視為向量的投影, 在文 [1] 中我們已經將其推廣到了各邊相等的空間多邊形。而對於結論 (ii), 我們發現 kuing 在該帖中的那種巧妙的證法對一般的平面等角多邊形也適用。

爲了保證結論的普遍性, 下面所提到的多邊形(含三角形) 的面積均指有向面積。先給出兩個引理。

引理1: 如圖 3, 有向角 $\angle A_{i-2}A_{i-1}A_i$、$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$、$\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 相等。在平面上任取一點 P, P 在邊 $A_{i-1}A_i$、A_iA_{i+1} 所在直線上的正投影分別爲 P_{i-1}、P_i. 過 P 分別作 $A_{i-2}A_{i-1}$、A_iA_{i+1} (即 $A_{i-1}A_i$ 的兩鄰邊) 的平行線, 這兩條平行線與邊 $A_{i-1}A_i$ 所在直線的交點分別爲 R_{i-1}、Q_{i-1}. 類似地, 作出邊 A_iA_{i+1} 所在直線上的兩點 R_i、Q_i, 則:

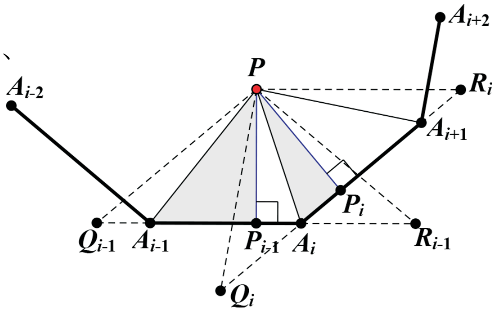

圖3

$$S_{\triangle PP_{i-1}A_i}-S_{\triangle PA_iP_i}=\frac{1}{2}(S_{\triangle PQ_iR_i}-S_{\triangle PQ_{i-1}R_{i-1}}).$$

證明: 注意到有向角 $\angle A_{i-2}A_{i-1}A_i$、$\angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$、$\angle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ 相等, 結合平行條件知: $\triangle PQ_{i-1}R_{i-1}$ 和 $\triangle PQ_iR_i$ 都是等腰三角形 (在某種特殊情形下會退化爲重合的線段)。所以有:

$$S_{\triangle PQ_{i-1}P_{i-1}}=\frac{1}{2}S_{\triangle PQ_{i-1}R_{i-1}},\qquad S_{\triangle PP_iR_i}=\frac{1}{2}S_{\triangle PQ_iR_i}.$$

又, 由平行條件知: 四邊形$PQ_{i-1}A_iR_i$是平行四邊形。因此有: $S_{\triangle PQ_{i-1}A_i}=S_{\triangle PA_iR_i}$, 即得:

$$S_{\triangle PQ_{i-1}P_{i-1}}+S_{\triangle PP_{i-1}A_i}=S_{\triangle PA_iP_i}+S_{\triangle PP_iR_i}.$$

移項並代入得

$$S_{\triangle PP_{i-1}A_i}-S_{\triangle PA_iP_i}=S_{\triangle PP_iR_i}-S_{\triangle PQ_{i-1}P_{i-1}}=\frac{1}{2}(S_{\triangle PQ_iR_i}-S_{\triangle PQ_{i-1}R_{i-1}}).\quad\square$$

注: 圖 3 中直線 $A_{i-1}A_i$ 與 A_iA_{i+1} 相交將平面分割成四個區域, 當點 P 在其他幾個區域 (甚至就在分界線上) 時上面的證明仍成立。也就是說, 引理 1 中的點 P 在平面上是任意的。

引理2(**見** [2]): 對平面多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 所在平面內任一點 O, 下式恒成立:

$$S_{多邊形A_1A_2A_3\cdots A_n}=S_{\triangle OA_1A_2}+S_{\triangle OA_2A_3}+S_{\triangle OA_3A_4}+\cdots+S_{\triangle OA_{n-1}A_n}+S_{\triangle OA_nA_1}.$$

現在, 我們就可以證明如下結論：

定理1: 在平面等角多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 所在平面上任取一點 P, P 在邊 A_iA_{i+1} 所在直線上的正投影爲 P_i $(i=1,2,3,\ldots,n)$. 約定 $A_{n+1}=A_1$, $P_{n+1}=P_1$, 則

$$\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PA_iP_i}=\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PP_iA_{i+1}}=\frac{1}{2}S_{多邊形A_1A_2A_3\cdots A_n}.$$

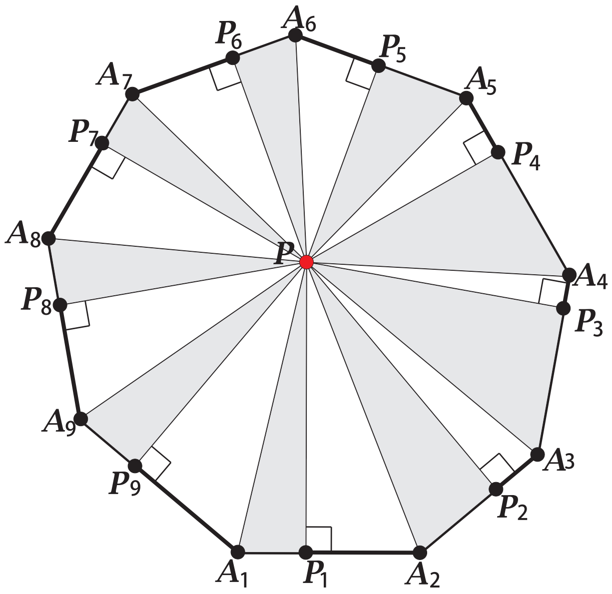

圖 4

圖 4 所示的是 $n=9$ 時的情形。

證明: 由於引理 1 中涉及有 4 條邊, 因此對 $n=3$ 要單獨證明。

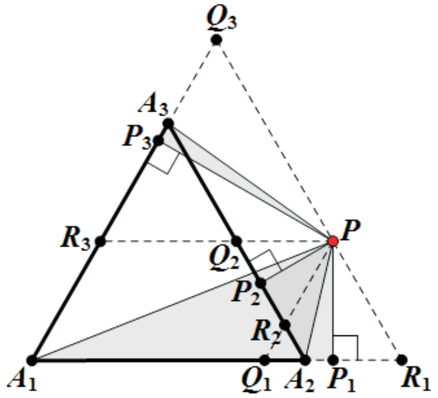

圖 5

當 $n=3$ 時, 如圖 5, 平面等角多邊形 $A_1A_2A_3$ 即是正三角形。圖 5 所示的是點 P 在正三角形外的情形 (在正三角形內的情形如圖 1)。雖然此時不能直接用引理 1, 但引理 1 中的方法仍然適用。

如圖 5, 過 P 作邊 A_1A_3、A_2A_3 的平行線, 這兩條平行線與邊 A_1A_2 所在的直線的交點分別爲 Q_1、R_1. 類似地, 可作出 Q_2、R_2、Q_3、R_3.

因 $\triangle A_1A_2A_3$ 是正三角形, 易知 $\triangle PQ_1R_1$、$\triangle PQ_2R_2$、$\triangle PQ_3R_3$ 都是正三角形。又, 由平行條件知: 四邊形 $PQ_1A_1R_3$、$PQ_2A_2R_1$、$PQ_3A_3R_2$ 都是平行四邊形。這與引理 1 中的條件完全類似, 因此, 完全同理可得:

$$\begin{aligned}
S_{\triangle PP_3A_1}-S_{\triangle PA_1P_1}&=\frac{1}{2}(S_{\triangle PR_1Q_1}-S_{\triangle PR_3Q_3}),\\
S_{\triangle PP_1A_2}-S_{\triangle PA_2P_2}&=\frac{1}{2}(S_{\triangle PR_2Q_2}-S_{\triangle PR_1Q_1}),\\
S_{\triangle PP_2A_3}-S_{\triangle PA_3P_3}&=\frac{1}{2}(S_{\triangle PR_3Q_3}-S_{\triangle PR_2Q_2}).
\end{aligned}$$

三式相加即知: $n=3$ 時定理 1 的第一個等號成立。

當 $n\geq 4$ 時, 過 P 分別作 $A_{i-1}A_i$、$A_{i+1}A_{i+2}$ (即 A_iA_{i+1} 的兩鄰邊) 的平行線, 這兩條平行線與邊 A_iA_{i+1} 所在的直線分別交於點 R_i、Q_i $(i=1,2,3,\ldots,n)$. 因爲多邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$ 是等角多邊形, 符合引理 1 條件, 由引理 1 可知:

$$2(S_{\triangle PP_iA_{i+1}}-S_{\triangle PA_{i+1}P_{i+1}})=S_{\triangle PQ_{i+1}R_{i+1}}-S_{\triangle PQ_iR_i}.$$

令其中的 i 分別取 $1,2,3,\ldots,n$ (約定 $Q_{n+1}=Q_1$, $R_{n+1}=R_1$), 將所得的 n 個等式累加可得:

$$\begin{aligned}
2\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PP_iA_{i+1}}-2\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PA_{i+1}P_{i+1}}&=\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PQ_{i+1}R_{i+1}}-\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PQ_iR_i}\\
&=\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PQ_iR_i}-\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PQ_iR_i}=0.
\end{aligned}$$

結合 $A_{n+1}=A_1$, $P_{n+1}=P_1$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PP_iA_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PA_{i+1}P_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PA_iP_i}.$$

另一方面 (包含 $n=3$ 的情形), 結合引理 2 有:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PA_iP_i}+\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PP_iA_{i+1}}&=\sum_{i=1}^{n}(S_{\triangle PA_iP_i}+S_{\triangle PP_iA_{i+1}})\\
&=\sum_{i=1}^{n}S_{\triangle PA_iA_{i+1}}=S_{\text{多邊形}A_1A_2A_3\cdots A_n}.
\end{aligned}$$

綜上即知定理 1 的後一個等號也成立。 □

需要指出的是: 定理 1 中的平面等角多邊形不必要求是簡單多邊形, 也可是邊與邊有交點的多邊形 (任意平面多邊形都可以定義有向面積, 參見文 [2]), 比如對圖 6 中的平面等角 8 邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_8$, 因爲裡面有很多矩形, 很容易用配對法驗證定理 1 的前一個等號成立(從而後一個等號也成立)。

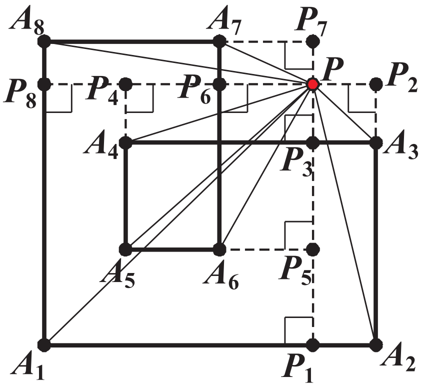

圖 6

一個有趣的問題是: 怎樣去構造平面等角 n 邊形? 換個說法, 這個問題即是:

問題: 平面等角 n 邊形的角應當具有什麼樣的形式?

易知: 正 8 邊形的角爲 $\dfrac{3}{4}\pi$, 而圖 6 中的平面等角 8 邊形的角爲 $\dfrac{\pi}{2}$. 正 5、6 邊形的角分別爲 $\dfrac{3}{5}\pi$、$\dfrac{2}{3}\pi$, 而圖 7、圖 8 中的平面等角 5、6 邊形的角分別爲 $\dfrac{\pi}{5}$、$\dfrac{\pi}{3}$.

我們注意到它們的區別在於: 兩者繞的圈數不同。如果平面等角 n 邊形像圖 6~8 中那樣繞的是兩圈, 則其“外角和”爲 4π. 由此可算得它的角爲 $\left(1-\dfrac{4}{n}\right)\pi$. 將 $n=8$、5、6 分別代入, 所得結果與圖 6~8 相符。

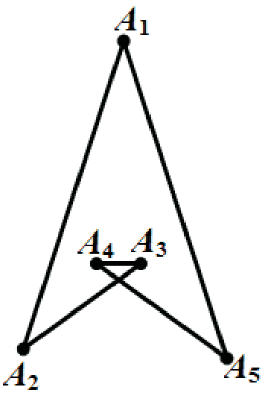

圖 7

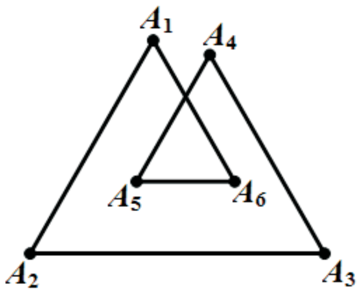

圖 8

同理, 如果繞的是三圈, 其"外角和"爲 6π, 可算得其角爲 $\left(1-\dfrac{6}{n}\right)\pi$. 這與圖 9 相符。如果繞四圈, 其"外角和"爲 8π。可算得其角爲 $\left(1-\dfrac{8}{n}\right)\pi$. 這與圖 10 相符。

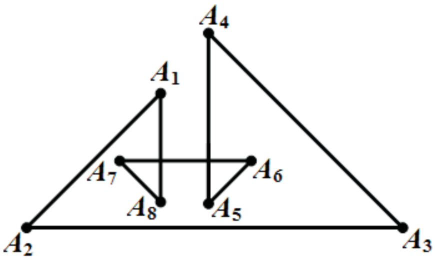

圖 9

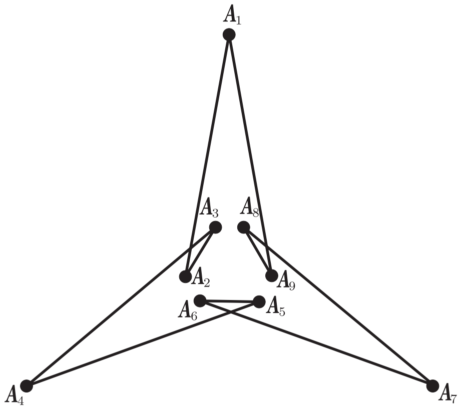

圖 10

一般地, 我們有:

定理 2: 平面等角 n 邊形的角應當形如 $\left(1-\dfrac{2k}{n}\right)\pi$ (其中 $1\le k\le\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$), 這裡 k 表示平面等角 n 邊形繞的圈數。

參考資料

1. 吳波。空間多邊形的幾個性質。數學傳播季刊, 40(4), 93-96, 2016。
2. 吳波。n 對平行線猜想的證明。數學傳播季刊, 39(2), 94-96, 2015。

—本文作者吳波任教中國重慶市長壽龍溪中學, 郭子偉是悠閒數學娛樂論壇版主—