相異代表系古今談*

是前生註定姻緣莫錯過

願天下有情人終成眷屬　　如果月下老人是數學家……

張鎮華

§1.起源：何氏定理

相異代表系（ systems of distinct representatives 簡稱SDR ）是1930 年代的問題，我們可以把它解釋爲委員會選派代表的問題，也可以將它看成月下老人牽紅線的問題。爲了簡單，我們先用集合的說法描述：給定集合族$A=(A_1,\cdots\cdots,A_n)$，希望在每一集合A_i中選出一個元素a_i，使得$a_1,\cdots\cdots,a_n$是相異的n個元素；這時我們稱$a=(a_1,\cdots\cdots,a_n)$是A的一個相異代表系。

在委員會選派代表的問題中，將集合A_i視爲第i個委員會的成員集，但是每個人都可能在好幾個不同的委員會裏頭，問題就是要在每個委員會裏找到一位代表，但是同一人不能代表一個以上的委員會。在婚姻問題裏，A_i可以看成是第i個女孩可能託付終身的白馬王子集，月老的任務是要將所有女孩許配給一位白馬王子，但二女不可同配一夫。

爲了更瞭解問題所在，讓我們看看下面三個例子。

例1：$A_1=\{a,b,c\}$，$A_2=\{c,d\}$，$A_3=\{b,d\}$，$A_4=\{c,d\}$。對這個系統，恰有兩組不同的相異代表系，就是(a,c,b,d)和(a,d,b,c)。

例2：$A_1=\{a\}$，$A_2=\{b\}$，$A_3=\{a,b\}$，$A_4=\{c,d,e,f,g,h\}$。這個集合族無解，因爲a必須代表A_1，b代表A_2，因此A_3就找不到代表。

例3：$A_1=\{3,4\}$，$A_2=\{3,7,9\}$，$A_3=\{2,3\}$，$A_4=\{6,11,12\}$，$A_5=\{4,6,8\}$，$A_6=\{2,6,9\}$，$A_7=\{3,4,8\}$，$A_8=\{3,5,10,13\}$，$A_9=\{2,3,7,9\}$，$A_{10}=\{2,8,9\}$。對於這個集合族，並不是一眼可以看出答案是什麼，在不知道好辦法的情況下，它可能浪費我們一個小時，用蠻力的方法去嘗試各種可能，最後終於得到答案了：不存在一個相異代表系。爲了要讓大家信服，我們並不需要將這一小時的演算重來一次，

*本文是依筆者1984 年秋天在中央大學講授「組合最優化」講義，擇其基本部份寫成。

一個簡易的方法可能是這樣的，將 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6，A_7，A_8，A_9，A_{10} 這8個集合聯集，得到{2，3，4，6，7，8，9}只含7個元素，所以不可能找到一個相異代表系。

例3的論證實在是這個問題的一個關鍵，它告訴我們，如果 $A=(A_1,\cdots\cdots,A_n)$ 有一個相異代表系，隨便拿出 k 個集合 $A_{i_1},\cdots,A_{i_k}$ 來，其聯集最少有 k 個元素；換言之，要說 A 沒有相異代表系，只要找出 k 個集合，其聯集的基數小於 k 即可。令人驚訝的是，這個必要條件同時也是充份條件，這就是著名的何菲力定理（Philip Hall's Theorem），我們將用和數學歸納法相等的最小原理來證明它。

何氏定理：$A=(A_1,\cdots\cdots,A_n)$ 存在一個相異代表系的充要條件是對所有 $I\subseteq\{1,\cdots\cdots,n\}$ 恒有 $|\bigcup_{i\in I}A_i|\geqslant|I|$。

證明：必要條件的證明已如上所述，現證條件爲充分。如果對所有 $I\subseteq\{1,\cdots\cdots,n\}$ 恒有 $|\bigcup_{i\in I}A_i|\geq|I|$，我們可以假設 A 是滿足這個條件的最小集合族，也就是，從任何一個 A_i 中去掉任一元素所得的新集合族不再滿足上述條件。首先要證明的是，所有 A_i 恰含一元素。否則假設 A_1 含有 x 及 y 但 $x\neq y$，則 $(A_1\setminus\{x\},A_2,\cdots\cdots,A_n)$ 和 $(A_1\setminus\{y\},A_2,\cdots\cdots,A_n)$ 都不滿足上述條件，因此存在足碼集 I，$J\subseteq\{2,\cdots\cdots,n\}$ 使得

$$|X|\leq|I| \text{ 且 } |Y|\leq|J|$$

其中

$$X=(\bigcup_{i\in I}A_i)\cup(A_1\setminus\{x\}),$$
$$Y=(\bigcup_{i\in J}A_i)\cup(A_1\setminus\{y\})$$

所以

$$\begin{aligned}|I|+|J|&\geqslant|X|+|Y|\\&=|X\cup Y|+|X\cap Y|\\&\geqslant|(\bigcup_{i\in I\cup J}A_i)\cup A_1|\\&\quad+|\bigcup_{i\in I\cap J}A_i|\\&\geqslant|I\cup J\cup\{1\}|+|I\cap J|\\&=1+|I|+|J|\end{aligned}$$

得到矛盾，所以每一集合 $A_i=\{a_i\}$ 恰含一元素，但因爲何氏定理的條件，所以這些 $a_1,\cdots\cdots a_n$ 都不相同，因此就得到一個相異代表系 $(a_1,\cdots\cdots,a_n)$。

何氏定理有許多有趣的應用，例如它可以用來得到下面兩個定理的簡潔證明。

斯伯納定理（Sperner's Theorem）：集合 E 恰含 n 個元素，F 是 E 的子集合族，其元素兩兩互相不包含，則 F 最多只有 $\binom{n}{[n/2]}$ 個元素。

伯考夫——馮紐曼定理（Birkhoff-von Neumann Theorem）：一個雙重隨機矩陣（doubly stochastic matrix）是一 $n\times n$ 的非負實數矩陣，其任一行或列的和恰爲1；若其元素均爲0或1，則稱爲排列矩陣（permutation matrix），因爲它恰和一個 $\{1,2,\cdots\cdots,n\}$ 上的排列相對應。定理是說，若 D 爲雙重隨機矩陣，則存在排列矩陣 $P_1,\cdots\cdots,P_m$ 及和爲1的正實數 $c_1,\cdots\cdots,c_m$ 使得 $D=c_1P_1+\cdots\cdots+c_mP_m$。例如

$$\begin{bmatrix}0.3&0.1&0.3&0.3\\0.1&0.5&0.2&0.2\\0.3&0.2&0.4&0.1\\0.3&0.2&0.1&0.4\end{bmatrix}=0.3\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$+0.1\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}+0.2\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$+0.1\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+0.2\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$+0.1\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

從文獻上考據，何氏定理始於 1935 年，事實上在 1931 年柯尼哥（D. Kőnig）和亞哥法利（E. Egerváry）就曾以不同的語言（即（0，1）矩陣或二分圖網），證明到相同的結果；尤有甚者晃哥（Menger）在 1927 年時，研究圖網的連通性，就有一些更一般化的定理，將前三者的結果視爲特殊情況。何氏定理重要的貢獻是，這樣描述的定理，開啓了一些緊閉的窗扉，通向往日鮮爲人知的大道。從 1930 年代到 1950 年代之間是相異代表系的起步時期，其中雷多（Rado）的貢獻頗多；一直到 1960 年代，這套理論和擬陣理論（matroid theory）相結合，才大展異彩。

§2.第二把鑰匙：擬陣理論

擬陣理論最早溯源 1930 年，代數學家范德瓦登（Van der Waedern）在他的代數書上，將線性獨立和代數獨立的概念公設化，但眞正將這件事情做得很徹底則是 1935 年惠特尼（Whitney）的一篇論文，他將圖網上的「沒有廻路」和代數中「獨立」的概念，共同熔於一爐，鍛就出擬陣這把金鑰。

這之後，伯考夫、馬克藍（Mac Lane）、笛兒臥斯（Dilwurth）等人由束理論（lattice theory）及幾何觀點做了一些研究，雷多在組合學的應用上及無窮擬陣也有重要的成果。但眞正將擬陣炒紅的應該是楊德（Tutte）在擬陣和圖網的研究，以及雷多在研究相異代表系時引進擬陣。自此之後，圖網論、擬陣和相異代表系的研究相結合，造成1960年代的淘金盛潮，納斯威廉（Nash-Williams）、艾德模斯（J. Edmonds）、佛兒克森（Fulkerson）、布勞弟（Brualdi）、彌兒斯基（Mirsky）、婆費特（Perfect）等人，諸家紛起，創下了輝煌的霸業。

所謂擬陣是一有序對 $M=(S,\mathcal{I})$，其中 S 是有限集合，$\mathcal{I}$ 是 S 的一個子集族，並且滿足下面三個公設。

（I1）$\phi\in\mathcal{I}$。

（I2）若 $X\subseteq Y\in\mathcal{I}$，則 $X\in\mathcal{I}$。

（I3）若 X，$Y\in\mathcal{I}$ 且 $|X|>|Y|$，則存在 $x\in X\setminus Y$ 使得 $Y\cup\{x\}\in\mathcal{I}$。

$\mathcal{I}$ 的元素（是 S 的一個部份集合）稱爲獨立集，仿照線性代數或圖網理論，我們也可以定義出相依、基底、序、生成集、廻路……等等概念。

例 4：S 是矩陣 A 的所有行 A_1，……，A_n 所成的集合，$\mathcal{I}$ 是所有 S 的線性獨立子集所成的集合，則 $(S,\mathcal{I})$ 是一擬陣。

例 5：$G=(V,E)$ 是一圖網，V 爲其頂點集，E 爲邊集，$\mathcal{I}$ 是所有 E 不含廻路的子集所成集合族，則 $(E,\mathcal{I})$ 是一擬陣。

例 6：$A_1=(A_1,\cdots\cdots,A_n)$ 是一集合族，$S=A_1\cup\cdots\cdots\cup A_n$，$\mathcal{I}=\{X\subseteq S$：對所有 i 恒有 $|X\cap A_i|\leq 1\}$，則 $(S,\mathcal{I})$ 是一擬陣。這個擬陣和研究 A 的相異代表系有密切的關係。

§3.電腦帶來的衝擊：匈牙利算法

在 1960 年代的熱潮裏，另外一個異軍突起的是電腦。電腦的興起完成人類快速計算的美夢，許多以前人們不敢奢望的問題，再度被拿出來借助電腦無怨言的快速計算順利完成。但是電腦的快速也有其一定的極限，於是一門

新興的學問——算法（Algorithm）——被廣泛的研究。

舉例來說，站在理論的觀點，何氏定理無疑的是一個極漂亮的定理，但從實用的立場來看，它似乎毫無發揮的餘地。隨便給 n 個集合，若想用何氏定理驗證是否存在一個相異代表系，就必須把 2^n-1 種不同的 k 個集合拿出來，看它們的聯集是否存在最少 k 個元素。一方面，當 n 大時，2^n 大得不可思議，再者即使驗證出的答案是肯定的，何氏定理也沒告訴我們那一組是相異代表系，為此，我們需要一個有效的算法。

把相異代表系轉換成二分圖網（bipartite graph）上求對集（matching）的問題是一種方便的語言。一般而言，一個**圖網**（graph）包含有限個**頂點**（vertices）以及一些聯接兩個頂點的邊（edges），如圖1的 A_1，A_2，A_3，A_4，a，b，c，d 是頂點，(A_1, a)，(A_1, b)，……是邊，但圖上 (A_1, c) 和 (A_3, b) 兩邊另外相交的點並不算做頂點，換言之，聯接某兩頂點的邊其實只表示這兩點是「有關係」或「相鄰」而已，至於用直線成曲線表示，實無區別。

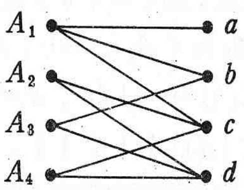


圖 1

圖1的圖網就是所謂的二分圖網，因為頂點可以分為兩部份，其中任一部份內的任二頂點不相鄰。這個二分圖網事實上也就是例1的集族的圖網表示法；$a\in A_1$ 所以 (A_1, a) 是一條邊，$b\notin A_2$ 所以 (A_2, b) 不是一條邊。(A_1, A_2, A_3, A_4) 的一組相異代表 (a, b, c, d)，在圖網上相當於 (A_1, a)，(A_2, c)，(A_3, b)，(A_4, d) 四邊，分別表示 $a\in A_1$，$c\in A_2$，$b\in A_3$，$d\in A_4$；這四邊中的任二邊沒有共同頂點，因為我們找不同集合的相異代表，圖2中粗線表示這四邊。像這種兩兩不含共同頂點的邊所組成的集合稱為對集（matching）。所以求 $(A_1, \cdots\cdots, A_n)$ 的一組相異代表，相當於在它所對應的二分圖網中找一個有 n 邊的對集。

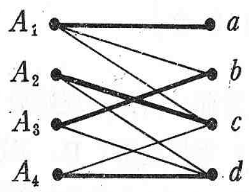


圖 2

用二分圖網表示集合族 $(A_1, \cdots\cdots, A_n)$ 的另一好處是可以看出集合 A_i 和元素 a_j 的對稱性，如果對每一元素 a_j，定義集合 $B_j=\{i : a_j\in A_i\}$，$(A_1, \cdots\cdots, A_n)$ 和 $(B_1, \cdots\cdots, B_m)$ 所對應出來的二分圖網實際上是同一圖網（可能頂點左右相反，名稱各異）。在婚姻問題中，這顯示男女平等。

隨便給一集合族 $(A_1, \cdots\cdots, A_n)$ 不一定存在相異代表系，所以在它的二分圖網中，也不見得能找到一個 n 邊的對集。一般來說，我們有興趣的是，隨便給一個二分圖網，求一個具有最多邊的對集，有名的匈牙利方法（Hungarian method）就是解決這問題的好算法。

給定一個二分圖網 $G=(X, Y, E)$，其中 X 和 Y 合成所有頂點，E 是邊集，任一邊的一端點在 X 內，另一端點在 Y 內。另給定 G 中的一個對集 M，如圖3(a)是一個例子，粗線代表對集 M。

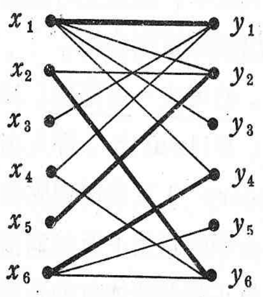


圖 3 (a)

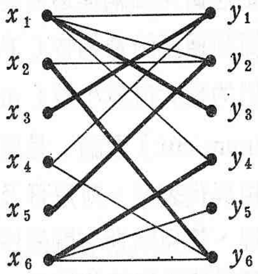


圖 3 (b)

G的一條**M—可擴張路徑**（M— augmenting path）是含有$2n+1$個頂點的一條路徑（v_0，v_1，v_2，……，v_{2n}，v_{2n+1}），其中（v_{2i}，v_{2i+1}）$\in E\setminus M$，$i=0$，1，……，n，但是（v_{2i-1}，v_{2i}）$\in M$，$i=1$，……，n，並且v_0和v_{2n+1}是**M—暴露頂點**（M— exposed vertices），也就是v_0和v_{2n+1}不是M內任何邊的端點。例如圖 3 (a)中（x_3，y_1，x_1，y_3）是一條M—可擴張路徑。

找到一條M—可擴張路徑P的好處是，如果將M在P的邊去掉，換上P中不在M的邊，將造成一個新對集M^*，其邊數比原來M的邊數增加 1 。圖 3 (b)就是用上述M—可擴張路徑做出來為M^*。

貝爾齊定理（Berge Theorem）：任一圖網（不一定是二分圖網）中的對集M是最大對集的充要條件是不存在M—可擴張路徑。

匈牙利方法簡單的說就是從二分圖網$G=(X, Y, E)$的任意對集M（例如空集合）開始，有系統的尋找M—可擴張路徑，若找到就得到一個更大的對集，再繼續一直到不存在M—可擴張路徑為止。尋找M—可擴張路徑的方法如下述。

(甲) $i\leftarrow 0$；列出所有M—暴露頂點當做第i層。

(乙)當i是偶數時：依次列出和第i層頂點相鄰的頂點當做第$i+1$層，但被列出過的頂點不再重複；若第$i+1$層沒有頂點則停止，表示沒有M—可擴張路徑。當i是奇數時：若有某個第i層的頂點是M—暴露頂點，表示找到一條M—可擴張路徑；否則將第i層每一頂點所聯接的一條M邊找出來，另一端點當做第$i+1$層頂點。

(丙) $i\leftarrow i+1$；回到(乙)重做。

以圖 3 (a)為例，可以得到下圖，其中我們賦予偶（奇）數層的頂點以正（負）號，這是為了以後說明方便。

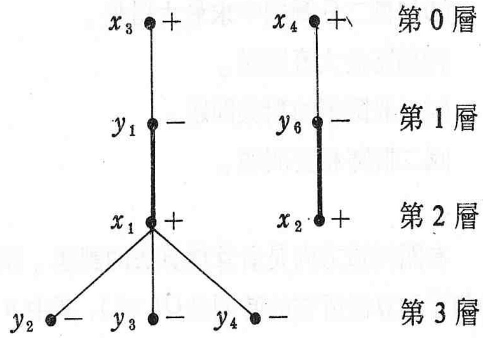


圖 4

因為y_3（負號）是M—暴露頂點，所以找到一條M—可擴張路徑，就是（y_3，x_1，y_1，x_3），這是由y_3倒返回去找到的。由這個M—可擴張路徑得到一個更大的對集，如圖 3 (b)所示，再做一次得到下圖，表示不存在M—可擴張路徑，所以已經找到最大對集。

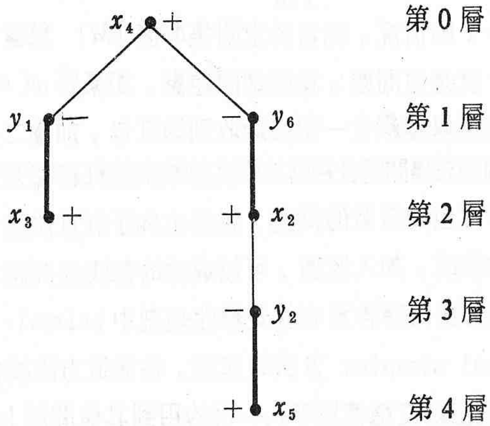


圖 5

§4.幾個發展方向

匈牙利算法彌補了何氏定理計算上的困難，相輔相成爲一套完美理論。從這爲出發點，有幾個發展方向，它們並不是互相獨立，而是交相參考，互補有無。我們列擧五個方向，略述大概。

(甲)更快的算法。

(乙)加權二分圖網中求最大對集。

(丙)網路最大流問題。

(丁)一般圖網的對集問題。

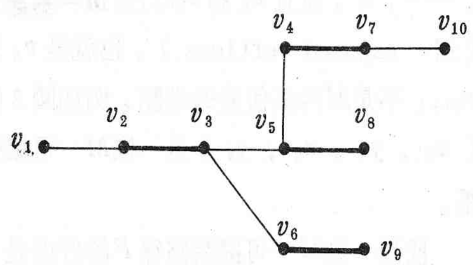
(戊)二擬陣相交問題。

有關(甲)這方向是計算機算法的課題。原來的匈牙利算法所需的時間是$O(n^3)$，其中n是頂點數，理論上是所謂的多項式算法（polynomial algorithm），比起$O(2^n)$的算法好上天，但精益求精，眞正實際將這算法寫爲程式時，還希望能更快更省時，基於這個原則，Hopcroft 和 Karp 發展出一個$O(n^{2.5})$的算法。

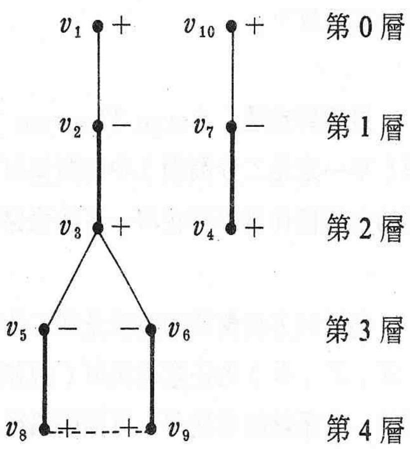
(乙)是一個自然的推廣，在原來的二分圖網$G=(X, Y, E)$上，如果每邊e對應一個正實數$\omega(e)$，原來問題的一個自然推廣是：求一對集M使得$\sum_{e\in M}\omega(e)$值極大。在$\omega(e)=1$的情況，相當於求對集M使$|M|$爲極大，就是原問題。在婚姻問題裏，如果將$\omega(e)$視爲媒婆綴合一對良緣收到的紅包，加權二分圖網對集問題就相當於媒婆想辦法拉紅線賺取最多紅包總錢數的問題。將原來匈牙利算法適當的修改，加入權數，可以成功的解決這問題；這方法的精神實在就是線性規劃中 primal-dual simplex 方法的起源，往後這方法被佛兒克森、艾德模斯等人一再的用到其他問題上。

我們一開始就已經說過，在晃哥看來，二分圖網對集是他研究圖網連通性的特例；把晃哥的理論發揮到極至的是福特（Ford）和佛兒克森，他們的最大流最小截（maximum flow minimum cut）理論，是這些理論的一個高潮，將相異代表系、柯尼哥及亞哥法利定理、晃哥定理、笛兒臥斯有關偏序集合鏈分解定理……種種紛雜的理論都納入一個體系之下，有一套完整的說法，在二十年後的今天看來，這樣的一統大業仍是十分偉大的。

我們在講匈牙利方法時曾敍述貝爾齊定理，這定理不只對二分圖網成立，對一般圖網都對，但是匈牙利方法卻不適用到一般圖網，原因何在呢？現在讓我們看一個例子。



按照原方法我們將得到



根據原來的講法，這表示不存在M—可擴張路徑，但是事實上$(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_8, v_9, v_7, v_{10})$是一條$M$—可擴張路徑。造成這樣的一個主要原因是在第4層的兩個頂點v_8和v_9相鄰，這在二分圖網不可能發生。就因爲$(v_8, v_9)\in E$，所以在$C=(v_3, v_5, v_8, v_9, v_6, v_3)$這個廻路中，我們可以任意調節

使得這個廻路的任一點都相當於正頂點，而可以接出一個負頂點，例如對於 v_5（負號），若想成 v_1（正）→ v_2（負）→ v_3（正）→ v_6（負）→ v_9（正）→ v_8（原來正，看成負）→ v_5（原來負，看成正），同理 v_3，v_5，v_8，v_9，v_6 都可以視爲正頂點，在艾德模斯看來，這個廻路 C 像一朵漂亮的花（Blossom），他的做法是將這朵花看成一點，也就是把 C 的所有頂點縮成一點，再繼續原來的做法，直到找出一條 M—可擴張路徑或證明不存在爲止，這個過程中可能一再重複碰到將花朵縮成一點這件事。以上就是艾德模斯「花朵算法」（Blossom algorithm）的簡單說法。這個算法也可以推廣到頂點加權的問題。

最後，將二分圖網求最大對集的問題看成兩擬陣相交問題，可回到例 6。如果 $G=(X, Y, E)$ 是一個二分圖網，則可以定義兩個擬陣 $M_x=(E, \vartheta_x)$ 及 $M_y=(E, \vartheta_y)$，其中

$$\vartheta_x = \{ I \subseteq E : X\text{的每一頂點最多是 } I \text{ 中一條邊的端點} \},$$

$$\vartheta_y = \{ J \subseteq E : Y\text{的每一頂點最多是 } J \text{ 中一條邊的端點} \}。$$

不難驗證 M_x 和 M_y 是定義在 E 上的兩個擬陣，而且 M 是 G 的一個對集若且唯若 $M \in \vartheta_x \cap \vartheta_y$，所以求 G 中最大對集等於求最大 M_x 及 M_y 獨立集。一般來說，如果給兩個定義在同一集合 S 上的擬陣 $M_1=(S, \vartheta_1)$ 及 $M_2=(S, \vartheta_2)$，也可以問同樣的問題，而這問題的解法將以前網路流的道理用到極致，是一個很成功的推廣。

綜而言之，從 1930 年代的相異代表系到兩擬陣相交問題，其精神和技巧是匈牙利方法的一再延伸和擴張。這一路研究，在近二十年來是很突出令人矚目的。

參考資料

1. 數播第四卷第四期（69 年 12 月）第 8～12 頁，王子俠著「相異代表系統簡介」。
2. Liu，*Introduction to Combinatorial Mathematics*，New York，McGraw-Hill，1968.
3. Mirsky，*Transversal Theory*，New York，Academic Press，1971.
4. Welsh，Matroid Theory，New York，Academic Press，1976.

—本文作者現任教於中央大學數學系—