B0005 高一的程度；初學或複習用

測驗時數：30 到 40 分鐘。

測驗內容：主題是無窮級數的收斂性及其收斂快慢的比較。

命題構想：要學生熟練移位消去法，分項分式，求數列的極限，求無限級數的和，極限的進一層意義。

(1) 我們用移位消去法來計算

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

可以算得

$$\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{3-1}{1\cdot 3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3\cdot 5}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$\frac{1}{5\cdot 7}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

其第 n 項 $a_n=\frac{\boxed{}}{2n-1}-\frac{\boxed{}}{2n+1}$ ①（分項分式）

數列 (S_n) 爲遞增或遞減？＿＿＿＿②，故 $S_n=$＿＿＿＿③

問無限級數 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$

爲收斂或發散？＿＿＿④若爲收斂，其和等於＿＿＿＿⑤。

(2) 同樣對於 $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\cdots\cdots+\cdots\cdots$ 我們仍用移位消去法：其第 n 項 $a_n=$ ⑥，利用分項分式，求

$$a_n=\frac{1}{2n+1}\left(\frac{\boxed{}}{2n-1}+\frac{\boxed{}}{2n+3}\right)⑦$$

以此計算前項部份和 $T_n=$＿＿＿＿＿＿⑧，且問這無限級數 $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 5\cdot 7}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9}+\cdots\cdots$ 是否收斂？＿＿＿＿⑨

若爲收斂，其和等於＿＿＿＿⑩。

(3) 在(1)、(2)中，設 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S$

$\lim\limits_{n\to\infty} T_n=T$

則 $S=$＿＿＿＿⑪，$T=$＿＿＿＿＿⑫

現在我們來看看極限的意義，並比較 S_n 趨於 S 與 T_n 趨於 T，那一個快速？ S 既然爲 S_n 的極限，則對於 S 的任何小的「鄰域」（註），S_n 在某一階段以後一定會走入這鄰域，而且一經走入，便不再離這鄰域的範圍，換句話說，若這鄰域取爲以 S 爲中心，以

$\frac{1}{10000}$ 爲半徑的區間 $\left(S-\frac{1}{10000}, S+\frac{1}{10000}\right)$，

問一旦跨過第幾階段後，即 n 大於 $N=$ ______ ⑬後，

$$S_n \in \left(S-\frac{1}{10000}, S+\frac{1}{10000}\right)$$

換句話說 $n>N \Rightarrow |S_n-S|<\frac{1}{10000}$，求 N（N 取其最小者）

同樣用這個問題來問 T_n 要在 $n>N=$ ______ ⑭（N 取其最小者）

以後，$|T_n-T|<\frac{1}{10000}$。

(4) 若再將鄰域範圍縮小，所取的 N 要越來越大，但在 (S_n) 與 (T_n) 的兩種情況所取的 N 在 (S_n) 的情況要比在 (T_n) 的情況 ______ ⑮（大或小？）

由此，我們可以歸結得如下事實：

S_n 之趨於 S 要比 T_n 之趨於 T 來得 ______ ⑯（快或慢？）。

（編輯部W. H.）

〔註〕這裡所謂 S 的「鄰域」，是指一個以 S 爲中點的開區間 $(S-\varepsilon, S+\varepsilon)$，其中 $\varepsilon>0$。