D0015（高二；二次式的標準化）

某生自某高級補習班背得標準化二次式的一個「妙法」如下：

給了一個二次曲線的方程式

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$$

之後，令

$$H=A+C$$

$$\delta=-\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=B^2-AC$$

$$\triangle=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

然後解方程式

$$X^2-pX+q=0, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

式中 $p=-\triangle\cdot H/\delta^2$, $q=-\triangle^2/\delta^3$，記(1)式之兩根爲 a^2 及 b^2，則原給二次曲線的標準式卽爲

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1$$

他當時一併看到的實例是：以此「妙法」求方程式

$$x^2+2xy+3y^2+6x+9y+9=0$$

的標準式，他取

$$H=A+C=1+3=4$$

$$\delta=-\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2$$

$$\triangle=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9/2 \\ 3 & 9/2 & 9 \end{vmatrix}=\frac{-9}{4}$$

求得 $p=-\triangle\cdot H/\delta^2=-(-9/4)\cdot 4/(-2)^2=9/4$

$q=-\triangle^2/\delta^3 \quad =-(-9/4)^2/(-2)^3 \quad =9^2/2^7=81/128$

以 p,q 之值代入(1)式解之，卽解

$$X^2-(9/4)X+81/128=0$$

得 $a^2=9(2+\sqrt{2})/16, b^2=9(2-\sqrt{2})/16$，而斷定經標準化後，
原方程式變爲

$$\frac{x''^2}{9(2+\sqrt{2})/16}+\frac{y''^2}{9(2-\sqrt{2})/16}=1$$

的形式，此乃橢圓的標準式。

一切似乎都很順利，他心想：「只要我背住了這個 p,q 的公式，就天下太平了，再也不用去讀二次曲線了。」

可是有一天他在標準化底下這個方程式

$$x^2+6xy+y^2-10x-4y+9=0$$

時，做得的答案有些同學說對，有些同學說不對，一時衆說紛紜，莫衷一是。而某生上次從補習班看來的做法是 $\delta<0$ 時的做法，現在 $\delta=3^2-1\cdot1=8>0$ 了，上次的做法是否仍能適用？他不敢肯定。你能出來替他解圍麼？當然你還有個義務：**勸告他以後別只背了公式而不知是非。**

問 1　(**D0015-1**)

說明他原來的妙法，對橢圓類二次曲線是正確的。解釋其理由。

問 2　(**D0015-2**)

在雙曲線類時，該生原來的妙法仍正確否？拋物線類時又如何？

（提示：以上請參看本刊本期「二次函數與二次曲線」一文。）

（編 輯 部 W. H.）