人口週期的最大週長

陳寬政

據人口學者研究的結論，臺灣地區的人口轉型已經接近完成的階段，人口於日據時期因死亡率下跌而成長，於光復後則因生育率下跌而趨向停滯。一九八四年時臺灣地區的婦女淨繁殖率爲 0.9567，已經低於人口自行替換的水準，則於人口轉型趨近完成的同時，人口的內部動態已經展現衰退的契機。但人口成長（或衰退）並不是人口變遷的唯一形式，人口的週期性波動也經常是人口變遷的重要成份；尤其是在人口轉型的前期與後期，由於人口趨向停滯發展，則週期波動愈益顯得爲人口變遷的主要成份。人口的週期波動可能是外生性的，如生育率因經濟景氣而變化等，也可能是內生性的，如嬰兒的數量爲父母數量之比例函數等。本文簡介內生性的人口週期，說明此類人口週期之構成爲兩代間的數量傳遞，其最大週長不可能超過兩代的間距。人口週期的週長越短則人口數量的變動越頻繁，振幅越大則變動越劇烈，均明顯不利於社會與經濟制度之維持穩定。

人口之出生在人口學上以再生式（Renewal Equation）來表示

$$B(t)=\int_o^\beta m(a,t)P(a,t)B(t-a)da$$
$$=\int_o^\beta \phi(a,t)B(t-a)da \qquad [1]$$

$p(a,t)$ 爲 $t-a$ 年出生的母親於七年存活到 a 歲的存活比（Survival Ratio），$m(a,t)$ 乃 t 年 a 歲母親的生育率（Fertility），$\phi(a,t)=m(a,t)p(a,t)$ 稱爲繁殖函數（Maternity Function），β 爲繁殖力的最高歲數。人口學的穩定人口模型（Stable Population Model）指出當出生數列

$$B(t)=B(0)e^{rt}\ ,\quad t\geqq\beta\ , \qquad [2]$$

而且 $p(a,t)=p(a)$ 爲固定不變的年齡函數時，

$$B(t)=\int_o^\beta \phi(a)B(t-a)da\ , \qquad [3]$$

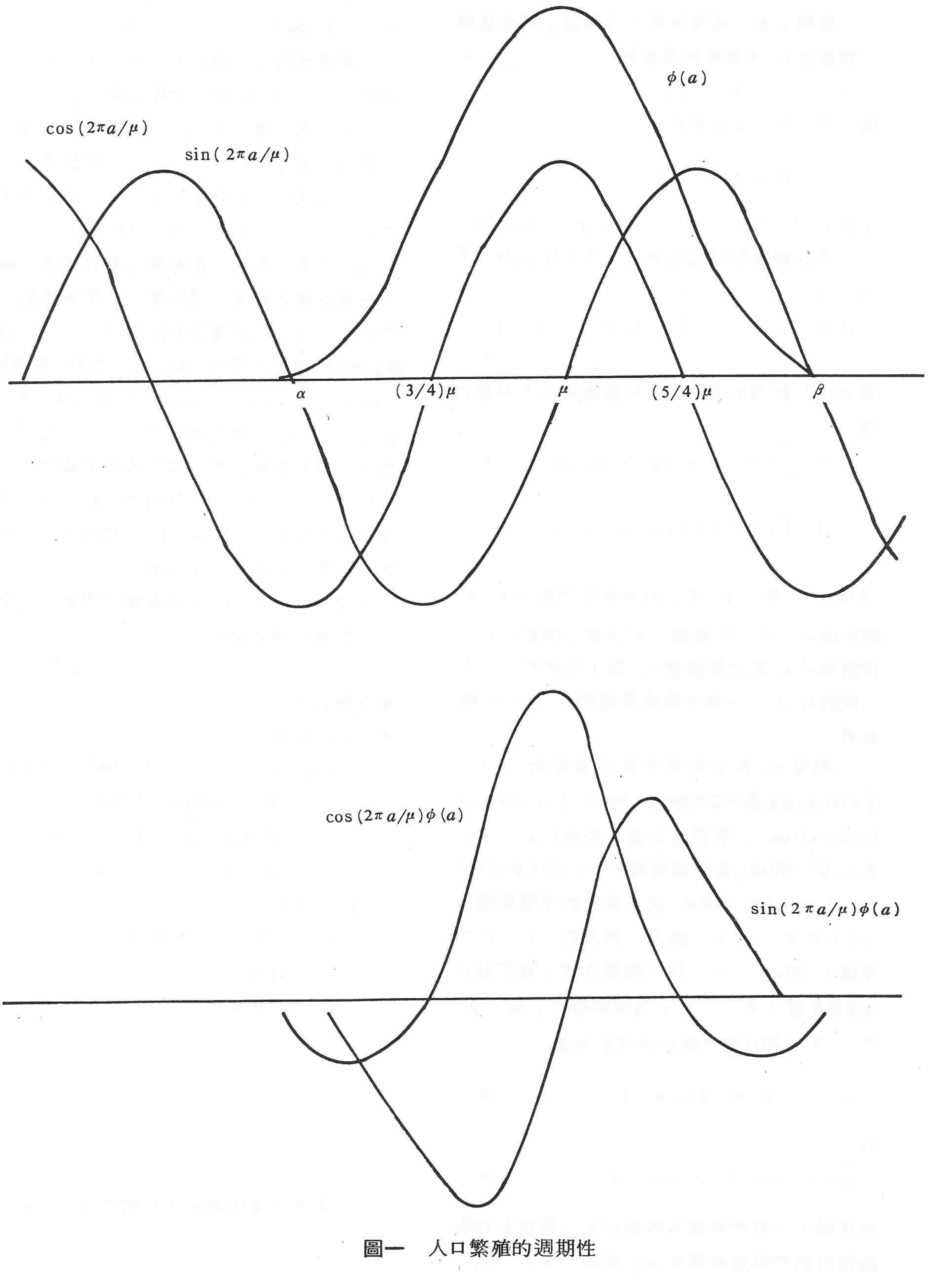
也就是說生育率也爲固定不變的年齡函數 $m(a,t)=m(a)$。將〔2〕代入〔3〕並且在等號兩邊均除以共同的數元得

$$1=\int_o^\beta e^{-ra}\phi(a)da\ , \qquad [4]$$

乃穩定人口的特徵式（Characteristic Equation），r 爲成長率（Intrinsic Rate of Growth），而 $\int\phi(a)da$ 則爲淨繁殖率（Net Reproduction Rate）；當 $r=0$ 時出生數列爲靜態人口

$$B(t)=B(0)\ ,$$

淨繁殖率 $NRR=1$ 表示人口足以而且僅足以自



$\cos(2\pi a/\mu)$
$\sin(2\pi a/\mu)$
$\phi(a)$
α
$(3/4)\mu$
μ
$(5/4)\mu$
β
$\cos(2\pi a/\mu)\phi(a)$
$\sin(2\pi a/\mu)\phi(a)$

圖一　人口繁殖的週期性

行替換。

使用〔4〕式來說明人口週期，解函數得一實數根r_o及無數對複數根

$$r_j = X_j \pm iY_j$$

則〔2〕式可以改寫爲

$$B(t) = \Sigma_{j=0}^{\infty} Q_j e^{r_j t} 。$$

由於$e^{-(X_j \pm iY_j)t} = e^{-X_j t}$〔$\cos(yt) \pm i \sin(yt)$〕，而且虛數部份因成對發生而互相抵消，所以

$$B(t) = Q_o e^{r_o t} + 2\Sigma_{j=1}^{\infty} Q_j e^{-X_j t} \cos(yt)。 \quad 〔5〕$$

表示出生數列的週期性。將複數根代入特徵式得

$$1 = \int e^{X_j a} \cos(ya) \phi(a) da, \quad 〔6〕$$

及

$$0 = \int e^{X_j a} \sin(ya) \phi(a) da, \quad 〔7〕$$

比較〔6〕與〔4〕式，由於餘弦函數$\cos(ya)$絕對值係小於一的數值，可以確定複數根r_j的實數部分x_j是比實數根r_o爲小的參數，〔5〕式的$Q_j e^{r_j t}$乃構成爲成長趨勢$Q_o e^{r_o t}$的殘差項。

如果r_1表示頻率最低的週期而$\mu = \int a\phi(a)da$表示平均代距(Mean Length of Generation)，我們可以進一步檢討x_1，y_1，與r_o間的關係。首先值得指出，r_o可以$\ln NRR/\mu$爲近似值(NRR 就是前述的淨繁殖率)，NRR 越大則r_o越大，而且從〔6〕我們知道x_1越小。以下爲了討論方便，我們設定NRR正好大到足以令x_1爲零的條件，則〔6〕與〔7〕均只剩下純粹週期的部份

$$\int \cos(ya)\phi(a)da = 1 \quad 〔8〕$$

與

$$\int \sin(ya)\phi(a)da = 0 \quad 〔9〕$$

再根據人口學所累積的經驗設定一個在平均點兩側對稱的繁殖函數$\phi(a)$如圖一，$\alpha = 15$，$\beta = 45$，$\mu = 30$，$NRR = 2.218$，則成長率$r_o \doteq 0.0265$。

當週長爲2μ時由於〔5〕式$\cos(yt)$必需在$t = 2\pi/y$拉回原點，所以$y = \pi/\mu$代入〔9〕式，得$\sin(ya)\phi(a)$在$\alpha \leqq a \leqq \mu$之間爲正值，而在$\mu \leqq a \leqq \beta$之間則爲負值，而且兩個部份互相對稱抵消，可以滿足等式條件；但$y = \pi/\mu$代入〔8〕式則$\cos(ya)$在$\phi(a)$不等於零的年齡範圍內均爲負值，顯然不能滿足等式條件。週期更長或頻率更低的y值代入〔9〕式均產生矛盾的結果，所以人口週期的長度不會大於平均代距。另一方面，當週長爲μ時$y = 2\pi/\mu$代入〔9〕式因$\sin(ya)\phi(a)$在$\alpha \leqq a \leqq \mu$間爲負，於$\mu \leqq a \leqq \beta$間爲正，而且對稱抵消，滿足等式的條件；$y = 2\pi/\mu$代入〔8〕式則$\cos(ya)\phi(a)$在$(3/4)\mu \leqq a \leqq (5/4)\mu$之間爲正，以外爲負，但圖一又指出$\cos(ya)\phi(a)$在$a \leqq (3/4)\mu$或$a \geqq (5/4)\mu$的區域內爲較小的負值，仍能滿足等式條件。

本文取材自

Ansley Coale

1972 *The Growth and Structure of Human Population*. Princeton: Princeton University Press.

Nathan Keyfitz

1977 *Applied Mathematical Demography*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

—本文作者任職於中央研究院三民所—