以多項式表質數的問題獲致結論

石厚高

讀者蔣先生來函

編輯先生鑒：

敬啓者：於數月前於閱讀一有關數論之書籍時，忽於紙上寫下下面一式：

$$n^3-(n+1)$$

遂以實值代入，並將其值翻查質數表，奇怪的，所計算出之值，全於該表尋得，但因該表之個數有限，不能肯定上式爲一質數公式，於是欲以反證，但至現在尚未解決。現在希望麻煩貴刊，給我一個寶貴之反證！

祝編安！

讀者E.C.蔣敬問

四月十二日

本刊韋端先生答覆

蔣同學：你的問題解答如下：

令 $f(n)=n^3-(n+1)$。設今給定任一質數 p. 則由基本除法，正整數 n 必可表爲 $n=pq+r$，q 爲商（正整數或零）. r 爲除數（ $0\leq r<p$ ），故

$$\begin{aligned}f(n)&=f(pq+r)\\&=(pq+r)^5-[(pq+r)+1]\\&=(pq)^5+5(pq)^4r+\cdots\cdots\\&\quad+5(pq)r+r^5-(pq+r+1)\\&=[(pq)^5+5(pq)^4+\cdots\cdots\\&\quad+5(pq)r-pq]+(r^5-r-1)\\&=pM+(r^5-r-1)\end{aligned}$$

（ M 爲一正整數或零）

由此可知，若存在 r ，$0\leq r<p$ ，使得 r^5-r-1 可被 p 整除，則 $f(n)=f(pq+r)$ 可被 p 所整除。今令 $r=2$ ，則 $r^5-r-1=29$ ，意即 r^5-r-1 可被 29 整除,故 $f(n)=f(29q+2)$ 可被 29 所整除，由是知當 $n=51$ （即 $q=1$ ，$r=2$ ）時，$n^5-(n+1)$（$=28629119$，一個相當大的數字）可被 29 整除。由是得一反證。同理由不同之 q ，r 之值，可得無數組反證。

韋端　敬啓

以上是民國六十年十一月科學月刊上的問題。它是個老問題：找出一個佈於整數系的多項式，它能表示所有的質數；或一個佈於整數系的多項式，不論以任何整數代入，它的值都是質數。筆者在高二時聽老師談到它，也一度爲它著迷。這些年來也看過一些學生或雜誌讀者提出的這種多項式。很遺憾，只要有人提出這麼一個多項式，一定可以找出某個整數 n 使函數值 $f(n)$ 有某個因數。

這種多項式往往是愛好數學的人仕發現了它，經多次測試結果都是質數，愈試數字愈大，想要找出它的因數又很麻煩，在一種「想當然耳」的心態下，就以為它能代表所有的質數。

學生對這種問題反應很熱烈，今年五月，我教的三年13班的羅烈熹同學舉出下面的疑問

設 a 為整數，以 $x-a$ 除 $f(x)$ 所得之商式為 $Q(x)$，則

$$f(x) = (x-a)Q(x)+f(a)$$
$$f(f(a)+a) = f(a)Q(f(a)+a)+f(a) = f(a)[Q(f(a)+a)+1]$$

所以 $f(f(a)+a)$ 恆有 $f(a)$ 之因數。

這個結果非常妙，它解決了「以多項式表質數的問題」，我把它整理成下面的結論：

任一佈於整數系的多項式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots\cdots a_nx^n, x\text{為整數}$$

(1) 設 a 為整數且 $f(a)\neq 0$，$f(a)\neq\pm 1$，則 $f(f(a)+a)$ 恆有 $f(a)$ 之因數，故使 $f(x)$ 之整數函數值恆為質數之多項式不存在。

(2) 不能表出所有的質數。

(1) 中的 $f(a)\neq\pm 1$ 是必要的，若 $f(a)=\pm 1$ 就毫無意義，而使 $f(a)\neq 0$ 且 $f(a)\neq\pm 1$ 的多項式很容易找到。

因

多項方程式 $f(x)=0$ 的整數解最多只有 n 個，
多項方程式 $f(x)=1$ 的整數解最多只有 n 個，
多項方程式 $f(x)=-1$ 的整數解最多只有 n 個。
所以多項方程式 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$ 或 $f(x)=-1$ 的整數解最多只有 $3n$ 個。另一方面，整數有無窮多個，故恆可找到一整數 a，使得 $f(a)\neq 0$ 且 $f(a)\neq\pm 1$。例如 $f(x)$ 各項係數皆為正而 $a>0$：則 $f(a)\neq 0$。且 $f(a)\neq\pm 1$。

由(1)的證明可以推出(2)。

各位讀者，何妨找個多項式試試看。下面這個多項式似乎是很有名，教本或參考書或數學趣味故事書都會提到它，教師也會在上課時引用

$$f(n)=n^2+n+41$$

在 $n=1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\cdots\cdots 39$ 時都是質數，而 $f(40)=41\times 41$ 其實不需要試這麼多次，信手拈來一個 5

$$f(f(5)+5)=f(76)=5893=83\times 71 = 83\times f(5)$$

故知任意整數 n 不恆使 $f(n)$ 為質數。

—本文作者任教於建國中學—

更正啓事

第十一卷第三期P.38第17行「………之分副。）……」改為「………之分割。）……」。

目錄
「旅行業務員問題……劉涵初
費馬大定理綜述……楊重駿、馬立志」
兩行之間插入
「快活的數學家……顏一清譯」

編輯部