

模糊集合論在物理學中的應用

許仲平

前言

這次回到台大物理系訪問時，恰好遇到數學系與中研院舉行一個“Mathematical festival”（數學聯歡節，包括研討會），師生一起祝賀許振榮與施拱星兩教授一生在台大與中研院培育人材、功德圓滿的退休。因為數學系有許多師友，我就去參加這個“festival”，再度聽聽“雷聲”，吃吃東西，會會師友，聊聊天兒。喜看數學系三十年來健康的成長，現在是一副雄姿英發的樣子。現在我把在中研院給一個seminar的導言部份加上一些背景和補充，寫成這短文。一方面簡單介紹一下數學上的一支新發展與它在基本物理上的關聯和應用。另一方面，許振榮先生教過我們物理系學生的微積分，教學之中也以身作則使我們看到學者面對答不出的問題所應有的態度，所以這短文也就算是在“festival”中湊湊熱鬧。

模糊數學是一門基於需要而發展出來的新學問。1965年加州大學（Berkeley）的電腦教授扎德（Zadeh）爲了用電腦處理不能精確定義的觀念，提出了模糊集合的觀念。通常我們以爲數學應該是嚴格清晰的，難道“模糊”在數理邏輯上可能是一種“美德”嗎？新一代的數理邏輯家相信是可能的。早年，模糊數學只是一小撮大學教授的智力遊戲而已，現在許多研究電腦功能的專家正在努力拓展這新領域。模糊集合論中的一個基本觀念是“模糊點”（fuzzy point），它也已經發展出一套模糊邏輯學、模糊拓撲學、模糊函數的各種積分等等。目前在台灣似乎還沒有人在這方面工作，但在大陸和日本已有不少的一批人在這方面作教學與研究工作。北京師範大學就有上中下三部關於模糊集引論的教學講義，大陸還出版一本叫“模糊數學”的期刊（大約在一年前它被

改名爲“應用數學”——可見發展一支新數學是不容易的）。

模糊集合的創立者扎德（Lotfi Zadeh），今年已經六十六歲了，他以前曾經是電機電腦系的系主任（electrical engineering and computer-science department，加州大學，柏克萊），出生於蘇聯，在伊朗長大，曾在哥倫比亞大學與麻州理工學院的電機系當過研究生。他注意到傳統上所處理的問題或定義，總是界線分明的——這是電腦思考的核心。然而天下事（如權力分配、通訊、經濟或心理方面的問題等等）往往不是這樣界線分明的。這些實際問題中，可變量太多，不明確的因素太多。他相信爲了解決這類問題，一個人必須降低眼界以求答案，而且要滿意的接受（本性）不精確的解答。

1964年7月的一個黃昏，當他思考這類

問題時，他得到了模糊集合的觀念，模糊邏輯也因此誕生了。那時候他正要去 Santa Monica 參加一個會議，目的是要跟別的專家研討如何教電腦認識手寫的字。途中他在 Manhattan 停留過夜，他掛念着一個問題：例如說要電腦認識小寫的 a (a)，按照通常集合論的規律來作定義的話，一個東西或元素與某一個集合的關係只能是“在或不在”那個集合裏——這是界線分明的 membership (“會員性”)。顯然的，如果定義得太過嚴格，那麼電腦只能認識完美的小寫 a 。如果定義太鬆，那麼電腦會把 a 與 d (或 o 或 q) 混淆起來，他突然想到：爲什麼不把在一個集合中的 membership 變成是一種程度上的差別 (而不再是只能 either-or)。如果這樣，電腦就不用作出“是或不是”的判斷，它可以接受一個字母 a ——即使這個 a 也像別的字母。第二天，他在會議上提出這個新觀念，但只得到不太熱烈的歡迎。扎德並不灰心，回到柏克萊以後，寫了一連串論文，開始拓展模糊數理邏輯的領域。(註一)

模糊集合的觀念原來是爲了描寫巨觀世界中的複雜現象而產生的，到目前爲止，好像還沒有別人認爲它與微觀世界中的基本物理現象有關聯，我與兩個學生 (研究生) 作過這方面的工作，得到的結果相當有趣。(註二，註三)。

爲了瞭解微觀世界的基本物理現象 (例如一個質點的運動)，通常須要有位置、動量這一類的觀念，這些觀念分開個別來說都可以有精確的定義。(海森堡的測不準原理只是說一個質點的位置和動量，不可能同時有精確的定義。) 在物理學中，大家一向認爲一個粒子 (或質點——沒有大小) 在某一時刻，總是存在空間的某一點。這是很明顯的事，大家都認爲這是天經地義的事，從來沒有人懷疑過，誰要是懷疑這種天經地義的觀念，很可能被認爲有點神經病。但是現在從量子學的觀點來仔細檢討這個“粒子位置”的觀念，可以看出來“精確

位置 (或座標) 這觀念是有基本性的問題的。而模糊座標 (或位置) 却沒有那基本性的問題，這就使它顯得有趣而且值得研究了——因爲那基本性的問題與量子力學的或然率概念有密切關聯的。

我們先看看扎德如何用模糊集合來處理“老年人”這個集合。例如說，把六十歲以上的人一律稱爲老年人並不是很恰當的。從生理或心理的觀點來看，五十九歲與六十歲的人並沒有界線分明的差別。以通常集合的觀點來說，五十九歲的人在老年人這個集合中的 membership function (“會員性”) 所取的值是 0，而六十歲以上的人在這個集合中的 membership function 所取的值是 1。這樣，一個人在老年人這個集合的“membership”只能是 either-or——也就是說，只能是在或不在這個集合裏。扎德的新觀念是把這個 membership 看成是一種程度上的差別：七十或八十歲的人在這個“老年人”集合的 membership 當然是 1 或很接近 1 (例如說，0.99)，至於五十九與六十歲的人的 membership function 所取的值可以是各別爲 0.55 與 0.60。這些數值只是用來當作例子，“程度上的差別”是可以調節改變來適應各種不同的情況。一般來說，各種 membership function 都可以用適當的曲線來表示。

從這個例子可以看出來，如果用電腦來幫助診斷老年人的病症，模糊集合的觀點是比較合情合理的。所以說，在巨觀世界中的複雜現象，模糊集合的觀念是有用處的。

但是在微觀世界的基本物理上，模糊集合論會有什麼用呢？

爲了回答這個問題，我們來看看量子力學如何處理一個質點的位置。首先，通常集合論的“點”與模糊集合論的點 (“模糊點”) 有很不一樣的性質：通常的點 (或一個數目) 只能是在或不在某一個子集中。我們可以給一個點 x 定義一個 membership function $\mu(x)$

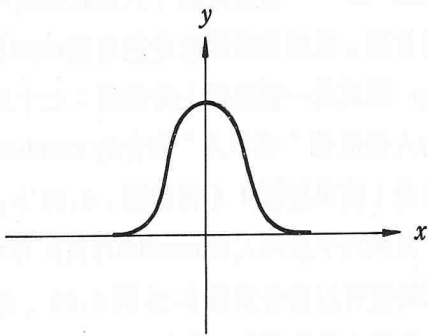
，它只能有兩個值 1 或 0：

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 在某子集中} \\ 0, & x \text{ 不在某子集中} \end{cases} \quad (1)$$

這是界線分明的。然而根據扎德的模糊集合，一個點可以是一個子集的 member 而具有一種或然的或者不確定的特性：用數表示時，一個模糊點 f 在某子集合 Z 中是一個具有 membership function $\mu_f(x)$ ，

$$\mu_f(x) = \begin{cases} y, & \text{for } x=x_0, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2)$$

的模糊子集合。(模糊集合永遠是指子集合的) 可以說：模糊點 f 有 support x_0 ，它的值是 y ， $0 < y < 1$ 。在集合 Z 中，所有的點，



只要它滿足 $\mu_f(x) > 0$ ，就構成模糊點的 support。一般來說，模糊點的 membership function $\mu_f(x)$ ，可以用一個鐘形函數來表示。

物理學把一個質點的位置假設為普通的點，它滿足(1)的性質。無論在古典力學或近代的量子學中，都是這樣假設的。質點的位置是由一個連續變量 q 來描寫的。在量子力學中，這樣的位置觀念有一個基本性的問題：

量子質點或粒子的位置 q 有它的本徵態 (eigenstates) $\langle q' |$ (或者 $|q' \rangle$)，這個態表示粒子是在 q' 點上，它滿足下面的數學關係，

$$\begin{aligned} \langle q' | q &= \langle q' | q' \\ & \text{(或者 } q | q' \rangle = q' | q' \rangle) \end{aligned} \quad (3)$$

通常就用這個本徵態 $\langle q' |$ 當作是位置基態 (position base states)。量子力學的 q 是一個位置算符 (position operator)，在這裏，我們可以把 q 當作是一個普通的連續變量。也可以說描寫這粒子的波函數是一個奇異 (singular) δ -函數：

$$\begin{aligned} \psi(q) &= \langle q' | q \rangle = \delta(q - q') \\ &= \begin{cases} \delta(0) = \infty, & q = q' \\ 0 & q \neq q' \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

它與(3)式是等價的——都表示這粒子(在某一時刻)是在 q' 點上，問題是這個位置的本徵態(3)或波函數(4)違背了量子力學的一個基本原理：這個原理說，所有量子力學的態都要有或然率的解釋。而這個位置本徵態不可能有或然率的解釋，因為它的波函數 $\psi(q)$ 不是平方可積的：

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q)|^2 dq = \delta(0) = \infty \quad (5)$$

因此，粒子位置的本徵態來自於對物理真實 (physical reality, whatever it means) 作了一種不恰當的理想化的結果。這個缺點在以前的物理實驗上是顯現不出來的，因為不可能做實驗來觀測電子的位置本徵態。不過，大家都相信：一個粒子或質點在某一時刻一定是存在於某一點 q' (如果它被觀測的話)。要確定一個粒子是在 q' 點，必須要有波長無窮短的波來做這個實驗，而這個顯然是實驗室裏做不到的事，因為無窮短的波長對應於無窮大的動量。

但話說回來，為什麼要假設和使用這個實驗上根本做不到的本徵態 $\langle q' |$ 呢？如果不用它，而用平方可積的位置基態 (position base states) 不是更合理嗎？這樣的位置基態才能有或然率的物理意義。

科勞德 (J. R. Klauder) 在 1963 年 (註四) 提出一種 Hilbert 空間的連續表象 (continuous representation)。這個連續表

象正好可以用來定義和討論一個量子粒子的位置的模糊基態 (fuzzy base states) ($q'|$:

$$\begin{aligned} \langle q'| &= \int_{-\infty}^{\infty} D(p'R/\hbar) e^{ip'q'/\hbar} \\ &\cdot \langle p'| dp' / (2\pi\hbar)^{1/2} \neq \langle q'| \quad (6) \\ h &= 2\pi\hbar = \text{Planck constant} \end{aligned}$$

為方便起見，我們借用動量 p 的本徵態 $\langle p'|$ 來表示模糊基態 ($q'|$)。根據量子波動方程式的考慮 (註三)， $D(p'R/\hbar)$ 是一個有理偶函數：

$$D(p'R/\hbar) = 1 / (2p'^2 R^2 / \hbar^2 + 1) \quad (7)$$

R 是一個很小的基本長度 (radical length)。目前的實驗只能給出它的上限： $R \leq 10^{-18}$ cm。在 $R \rightarrow 0$ (或者 $D(p'R/\hbar) \rightarrow 1$) 的極限時，模糊基態 ($q'|$) 就變成本徵態 $\langle q'|$ 。由 (6) 和 (7) 式可以決定位置基態所對應的“模糊點”是什麼樣子的：

$$\begin{aligned} \langle q'|q'' \rangle &= (2\pi\hbar)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} D^2(p'R/\hbar) \\ &\cdot e^{i(q'-q'')p'/\hbar} dp' \\ &\propto e^{-|p'-q''|/(\sqrt{2}R)} \quad (8) \end{aligned}$$

我們這些討論的基本假設是：一個量子粒子 (quantum particle) 的位置對應於一個模糊點。這個新的基本假設可以用位置的測不準 (uncertainty) Δq 的極小值來作數學的表式：

$$\Delta q_{\min} = R \neq 0 \quad (9)$$

(Δq 是位置 q 在某狀態的 root-mean-square value) (9) 式的含意是：不管如何改進實驗儀器和技術，我們永遠不能測量粒子的位置測得誤差比基本長度 R 還小。換句話說，我們假設模糊基態 ($q'|$ 是大自然所能存在最小的波包 (wave packet)，這個最小波包的寬度 (width) 是 R 。原則上，比它小的波包不可能存在。

數學上可以證明模糊位置基態滿足一種

modified closure relation 以及其他關係式等等。在這樣子的理論裏，連續變量 (如座標和動量) 都是模糊動力變量 (fuzzy dynamical variables)，它們所對應的算符 (operators) 是一種模糊矩陣 (不能對角化，因為它們沒有精確的本徵值。這種新的量子力學，可以稱為“模糊量子力學”，它的物理結果與普通量子力學的結果是幾乎一樣的——不能用已知的實驗來說誰對誰錯。只有涉及很短距離的物理現象 ($r \leq R \leq 10^{-18}$ cm)，或非常高能的物理現象，才有明顯的不一樣。希望以後新的加速器 SSC (Superconducting Super Collider) 建造完成以後，可以做實驗看看模糊量子力學的理論對不對，至少可以更好的估計基本長度 R 的上限。

我們現在來總結一下模糊量子力學與普通量子力學之間幾個主要不同的地方：

1. 粒子在空間的位置是一個模糊點，而不是普通的幾何點。這個性質導致一個粒子的物理存在的一幅新圖象：在某一時刻，一個粒子 (它本身沒有大小，沒有結構) 不是完全存在某一點，而是以不同的或然率在某一點和別點。當測量粒子位置的精確度 (Δq) 接近 R 時，測不準原理需要修正一下——不是改變它，而是給它加上一個限制條件 (9)。因為 Δq_{\min} 不是 0 而是 R 。這個性質使模糊量子力學更遠離古典物理的確定性。(註五)

2. 電子所產生的庫倫位 (Coulomb potential)，不再是一個點源 (point source or δ -function source) 而是一個模糊點源。這表示電子有一種“天生的”電荷分佈 (叫 R -inherent charge distribution)，當 $R \rightarrow 0$ 時，它會變成普通的 δ -function 電荷分佈。因此可以導出一種 modified 庫倫位，當 $r \gg R$ 時，它與普通的庫倫位一樣，可是 $r \leq R$ 時，它就有很明顯的不同。

3. 一個粒子的動量不能任意的大。當動量接近 \hbar/R 時，有一種 R -inherent probabi-

lity會明顯的抑制它。(註三)按照普通的量子力學，在原則上一個粒子的動量是可以任意大的。

4. 如果微觀世界中或然率是一個根本的、正確的觀念，那麼相對論在非常短距離($r \leq R$)的領域中是要被修正的。許多著名的物理學家早就覺察到這點。(註六)這是一個很深奧的問題，它牽涉到量子場論的一個基本觀念——locality。這也要靠將來的物理實驗來分解了。

讀者如有興趣，可以從註三和註四中看到比較全面的和更進一步的討論。

研究模糊量子力學是相當偶然的：幾年前我教量子力學時，一個學生在課堂上問了一個有趣的問題，使我受到刺激而開始仔細思考。這真是一個教學相長的好例子。(註七)

現在讓我利用在“Mathematical festival”中湊熱鬧的機會跑一下野馬：三十年前許振榮先生教我們微積分時，有一件事情給我很深刻的印象，這是我求學過程中第一次遭遇到破天荒的事，現在回想起來還是歷歷如目：開學不久還在講極限時，俊明在課堂上問了一個問題，許教授停下來想了一陣子，鄭重其事的說：“這個問題不容易回答，讓我回去想一下，下次再回答”。下次上課時，許振榮先生說：“這個問題很難，大部分的學生可能不瞭解，不過我還是回答一下……”結果三言四語的回答了。從頭到尾我就像“鴨子聽雷”一樣。我曾經問過別的同學，他的感覺和我一樣。

數學對於學其他科學(如物理、化學)的人來說是必要的工具。但是在數學教育上，到底要別系學生學到什麼程度呢？基於三十年來的經歷，我覺得徐賢修先生講得最中肯最切實。大約是1962年，他在台大講應用數學方面的課，他講完一個數學方法，順便提醒學生的注意：“對數學學得越深並不一定越強。有時候，許多問題都可以用elementary method解決，而不必求之於高深方法。G. I. Taylor

(註八)對流體力學就有極大的貢獻，他看問題有極強的Physical insight(物理洞察力)，結果把許多問題用elementary method就解決了。我讀高中時，對atomic theory是極有興趣的，我數學學得很好，但一看羅素(B. Russell)的The ABC of Atoms，不懂。後來又看到什麼 $E = mc^2$ ，也不懂。所以我覺得數學對物理有時並沒有什麼多大的幫助，只要把問題啃對，那就好辦了。當然，大家都很用功，自己很認真念書。我看過有人唸group theory或set theory的書，一問，他說是化學系的學生，我嚇了一跳，什麼！這些東西物理系的學生都不要唸！怎麼把你們好好珍貴的golden age花在這上面？不必要，絕對不必要！你又不是數學系的學生，唸這些幹什麼！當然，group theory是很重要的一門數學，在物理、化學上都有很好的應用，但化學系的學生，用不着唸專門的書，多花點時間去唸唸化學好了……”。

這是當年記下來的一段話，它對我有深遠的影響。一般來說，物理和化學系的學生，要瞭解group theory和set theory的一些基本觀念、性質和簡單的例子，其他證明這個，證明那個，就“盲從”數學家好了，錯不了的。研究時遇到必要，再多學一點來應付。唉！至於大學生“好好珍貴的golden age”應花在什麼上面，那真是一言難盡了……。

後記

寫完這篇短文以後，余文卿教授告訴我說，許振榮先生在7月14日(1988年)病逝於美國。聞之悵然。謹以此文獻給許振榮教授，藉以表達敬意和懷念。

註釋

註一：K. McKean and T. Dworetzky, “

Fuzzy Means to Logical Ends ”, *Discover*, Feb. 1985, pp. 70~73.
L. Zadeh 的第一篇論文發表在 *Inf. Control* 8, 338 (1965).

註二：J. P. Hsu, *Nuovo Cimento* 89B, pp. 14~29 (1985); 80B, pp. 183~200 (1984).

註三：J. P. Hsu and S. Y. Pei, *Phys. Rev.* A37, 1406~1410 (1988); J. P. Hsu and Chagarn Whan, *Phys. Rev.* A38, 2248~2254 (1988).

註四：J. R. Klauder, *J. Math. Phys.* 4, 1055; 4, 1058 (1963).

註五：P. A. M. Dirac, *Sci. Am.* 203, 48 (1963). Dirac 說：“我想一個人可以做一個無風險的猜測：目前的測不準原理是不能在將來的物理學中苟全性命的。當然，物理不可能回到古典的確定論 (determinism)，演化是不會走回頭的，它只會向前走。將來一定會有出乎意料的新發展，那發展是猜不到的，它將帶領我們更進一步遠離古典的觀念……”。

註六：J. Schwinger, “Quantum Electrodynamics” (Dover, 1958) p. xvi。
Schwinger 研究量子電動力學 (QED) 多年，而且有極大的貢獻，他作了一個富有洞察力的結論：“不發散的學說 (指 QED 或一般量子場論) 是不可能目前的時空觀念框架中毫無矛盾的作出來。要限制相互作用的大小 (magnitude) 又要保持通常的座標描述是矛盾的，因為學說中沒有一種機制或方法 (mechanism) 可以用來精確的測量位置”。

註七：我班上的學生 H. Stevens, Jr. 是一個退休的工程師。(他年輕時曾經和愛因斯坦、羅素通信討論問題，並且得到他

們的回信。在羅素回信的影響下，他橫下心來花了一筆不少的錢買了那三部有名的天書 “Principia Mathematics” I, II, III (羅素與懷德海合著) 來讀，可以想像他當年的狂熱程度。) 上課時他問我：「有沒有人或可不可能用“非點”的觀念來描寫一個粒子？」那時我正在解釋質點是一個基本假設，它使數學描述簡單，但是在量子場論中也引起基本的發散困難。我回答說：「有些物理學家用各種辦法把電子當作是有大小的粒子來攻擊這個基本困難，但是這些“攻擊”都在相對論的銅牆鐵壁陣前紛紛敗下來」。(誰敢說相對論可能要修改？沒有實驗證據嘛。而且，這話一說出口，駟馬難追，好傢伙，你敢說相對論不對，馬上把你打成“反革命”，一輩子得不到“平反”。) 下課後，我還想着學生的問題，模模糊糊記得凡異出版的“數學百科辭典”裏面提過用模糊點來討論 Topology，心想“什麼是模糊點？”查了一下，這兩部當年賴東昇先生介紹我買的參考書果然有用。

註八：Geoffrey Ingram Taylor (1886-1975)，英國氣象學和物理學家。由於他的精巧實驗和深刻洞察流體現象，他對流體湍流 (fluid turbulence) 的理解和湍流所引起的擴散 (diffusion caused by turbulence) 都作出很大的貢獻。

Note added in proof:

吳大猷先生的 “Quantum Mechanics” (World Scientific, 1986, pp. 183-184 (特別討論到波函數非平方可積的情形和 Weyl 的處理方法 (這是一個企圖用純數學手段來解決物理問題的例子))。吳先生的書中有一些特別精彩，值得欣賞的物理討論，在別的書裏是找不到的。

(本文作者任教於美國 Southeastern Massachusetts 大學，物理系)