來　猜　題

〔徵答對象：職業、年齡不拘〕

李國偉

本文作者現爲本所副研究員。

整數論這套學問相當微妙，你可以知道很少很少的專門知識，而提出非常非常難的問題。譬如「數季」第二期。李恭晴先生收錄的「數論上的一些未解問題」，我想那裏面的問題多半不是讀者費盡吃奶的力氣所能解決的，然而問題的陳述卻大多極易了解。因此我建議讀者不要卽刻滿懷壯志的去解題，而應該仔細觀察一下，如何搜求「證據」，提出有意義的疑問。這裏我講一點自己的經驗以供大家參考。

我們來看看該期第 74 頁的問題丙：「**是不是對於每一自然數 N，都可以找到一個質數 p，使得當 $0\leq n\leq N$ 時，n^2-n+p 恆爲質數？**」這個問題其實是非常難的。爲什麼呢？因爲當 $n=p$ 時，n^2-n+p 就不是質數，所以 n^2-n+p 充其量只當 n 由 0 到 $p-1$ 時爲質數。

假設這問題有正面解，並令 p_1 爲任一質數，則我們可找到另一質數 p_2，

使　$0\leq n\leq p_1 \Longrightarrow n^2-n+p_2$ 爲質數，

接著，對 p_2 而言，我們又可找到另一質數 p_3，

使　$0\leq n\leq p_2 \Longrightarrow n^2-n+p_3$ 爲質數

…………；一般而言，有了 p_{i-1} 之後，我們就該可找到質數 p_i

使　$0\leq n\leq p_{i-1} \Longrightarrow n^2-n+p_i$ 爲質數　(1)

在(1)式中，由於 $n=p_i$ 時，n^2-n+p_i 卽不爲質數，故 $p_i>p_{i-1}$，因此，我們得到一個相異質數所成的無窮嚴格遞增（Stric. incre.）序列 $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$，且皆滿足(1)式。

但在(1)式左端以 $n=1$，2 代入顯然滿足，故，相應的從(1)式右端我們就得到了無限多對相異的孿生質數了：

$$\{p_i, p_{i+2}\}_{i=1}^{\infty}$$

這就表示孿生質數問題（見該文問題壬）有了正面解。但我們知道孿生質數問題是硬得幾乎啃不動的，又怎敢輕易在問題丙上試牙ロ呢？

但是讓我們再看看支持問題丙的證據，拋開伯格爾（Berger）的例子不管，我們只有：$0\leq n\leq 16$ 時，n^2-n+17 是質數（Legendre 發現的）；$0\leq n\leq 40$ 時，n^2-n+41 是質數（Euler 發現的）。而事實上我們翻翻數論史便知 Legendre 同時發現 $0\leq n\leq 28$ 時，$2n^2+29$ 爲質數，於是支持問題丙的「證據」，可以建議出下列一個新問題〔註 1〕：

「**是不是對任何質數 p，都可以找到一整係數多項式 $f(n)$，使得 $f(0)=p$，而且當 n 由 1 逐一變至 $p-1$ 時，$f(n)$ 可產生 $p-1$ 個互不相同的質數？**」

〔註 1〕此次問題的形式正略加修正過，謝謝本所同仁張鎭華先生指出我原來問題中的毛病。

如果我們把這個問題叫做 $L(p)$，則我們已知 $L(17)$, $L(29)$, $L(41)$ 爲眞。當初我想到 $L(p)$ 時就開始動手試 $L(2)$, $L(3)$, ……等等，結果經過多次的猜與算，證明 $L(p)$ 對於 $p\leq 29$ 的質數均爲眞，我把所得的多項式列爲下表：

p	$f_p(n)$
2	$n+2$
3	$2n+3$
5	$2n^2+5$
7	$2n^2-2n+7$
11	n^2-n+11
13	$6n^2+13$
17	n^2-n+17
19	$2n^2-2n+19$
23	$3n^2-3n+23$
29	$2n^2+29$

至此我感覺「證據」的數目已足夠提出一個假說（conjecture）：

「$L(p)$對任何質數p均爲眞。」

爲了加強我的假說成立的可能性，自然我開始猜 $f_{31}(n)$，不幸的是類似上表中那些樣子簡單的多項式，試了試都不管用。於是問題來了，$L(31)$ 到底是眞？是假？如果 $L(31)$ 爲假，則我的假說不成立；如果 $L(31)$ 爲眞，則我的假說就愈來愈成一個有興趣的問題了。各位讀者來加一手吧！或者您也可試著從其他數論「名題」已有的「證據」中嘗試發現新的問題，這不是挺有意思的嗎？