項武義先生演講一

平行與三角(下)

(Parallelism and Trigonometry)

時間：77年6月23日　　地點：台灣大學舊數館301室

第三節　抽象旋轉面的解析幾何

歐氏空間和非歐空間的基本性質大體相同，它們具有完全同樣的連結、次序、疊合和連續性質，而唯一相異者就是前者的三角形的內角和恒等於一平角，而在後者則恒小於一平角。再者，在本章第一節所討論的球面幾何。它和歐氏幾何在連結、次序等方面都有不少相異之點，但是却也具有同樣的疊合公理。疊合公理的本質乃是空間的對稱性在基本幾何事物如線段、角區和三角形上的具體表現。一個比較現代化的提法是：歐氏、非歐和球空間都具有同樣的對稱性，它們都是對於空間中任給的一方向皆成反射對稱（reflectional symmetric）的幾何模型（Geometrical Models）可以說這三種空間乃是大同小異的；大同之要者在於它們在對稱性上的共性，而小異之點則在於三角形的內角和上的區別，亦即在歐氏空間中恒等於一平角；在非歐空間中恒小於一平角，而在球面空間中則恒大於一平角，J.Bolyai在他的「絕對幾何學」那篇短文中的偉大創見啓示我們應該採取「求大同存小異」的想法，去探討一種對於上述三種古典幾何學的統一理論。

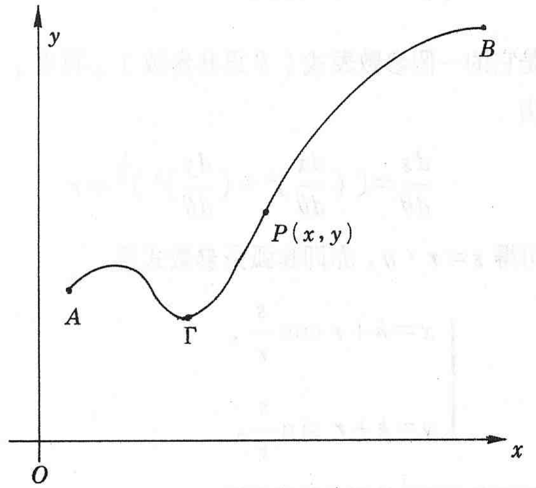
三角形的兩邊一夾角（S.A.S.）疊合公理，乃是上述三種古典幾何的基礎理論中最最主要的基石與支柱；三角形的幾何性質的研討則是三種幾何學的精要所在。再者，三角學（Trigonometry）的中心課題就是要把「三角形的疊合條件」，如S.A.S.，A.S.A.，S.S.S. 等定性的三角形唯一性定理提升到定量的有效能算的角邊函數關係，這也就是三種幾何中各別的正弦、餘弦定律，它們其實就是三種幾何學中通統全局的精要與樞紐之所在，也是從而建立歐氏、球面、非歐解析幾何學的基礎所在。J. Bolyai在他的「絕對幾何學」中所提出的統一正弦定律，即

$$\frac{\sin A}{\odot a}=\frac{\sin B}{\odot b}=\frac{\sin C}{\odot c}\quad（參看上一節）$$

不但啓示了三種幾何的統一三角學理論的存在，而且其中所出現的圓周長函數也指示了這種統一理論的關鍵所在和可行的途徑。長話短說，歐氏、非歐及球面都是對於面中任給一點皆成**旋轉對稱**的（rotational symmetric）。在對於定點 0 的旋轉運動之下，和 0 點的距離爲 r 的點構成一個軌道，其弧長就是Bolyai 統一正弦定律中的主角$\odot r$。函數$f(r)=\odot r$ 顯然就是記錄這個旋轉對稱的幾何結構的**本質性資料**（intrinsic data）。由此可見，J. Bolyai 統一正弦定律的形式相當明顯地啓示着，研究旋轉面的解析幾何乃是探索歐氏、非歐和球空間的統一幾何理論的自然途徑。我們將在本節運用極爲簡樸的微分和積分運算研討抽象旋轉面的解析幾何。本節所得的兩個基本定理將是下一節建立三種古典幾何的統一三角學的依據，而且也是簡單明瞭地解答非歐空間的存在性與唯一性的有力工具。

(一)弧長、曲率與弧長第一變分公式

讓我們先以較爲簡明的平面曲線爲例，說明曲線的弧長、曲率與弧長第一變分公式這三個密切相關的基本概念。設 $f(t)$ 和 $g(t)$是兩個給定二階連續可微函數，$a\leqslant t\leqslant b$，則分別以 $f(t)$ 和 $g(t)$ 爲其 x，y 座標的動點 $P(t)=(f(t),g(t))$所描述者就是平面上的一條



曲線Γ：

$$x=f(t),\ y=g(t);\ a\leqslant t\leqslant b$$

叫做該平面曲線的參數式。在曲線Γ上的鄰近兩點$P(t)$和$P(t+\Delta t)$，當 Δt非常微小時，它們之間的距離的一階逼近（亦即誤差是比Δt要高階的微量）是：

$$\begin{aligned} &d(P(t),P(t+\Delta t))\\ &=\{[f(t+\Delta t)-f(t)]^2\\ &\quad+[g(t+\Delta t)-g(t)]^2\}^{\frac{1}{2}}\\ &\doteq\{f'(t)^2+g'(t)\}^{\frac{1}{2}}\cdot\Delta t \end{aligned}$$

通常我們用 s 表示曲線的弧長，即有弧長微分公式

$$\frac{ds}{dt}=[f'(t)^2+g'(t)^2]^{\frac{1}{2}}$$

和總弧長的積分公式

$$L(\Gamma)=\int_a^b[f'(t)^2+g'(t)^2]^{\frac{1}{2}}\cdot dt$$

同一條路可以有各種不同的走法；同一條曲線Γ也當然可以有很多不同的參數表達式。從純幾何的觀點來看，弧長 s 乃是一條曲線上最爲自然的本質性參數。所以往後在研討曲線的幾何性質時，總是優先採用弧長參數，它和任給參數 t 之間的函數關係是：

$$s(t_0)=\int_a^{t_0}\frac{ds}{dt}\cdot dt$$

設 $x=\varphi(s)$，$y=\phi(s)$ 是給定曲線Γ的弧長參數式，則動點$P(s)=(\varphi(s),\phi(s))$的速度向量（velocity vector）

$$\boldsymbol{t}(s)=(\varphi'(s),\phi'(s))$$

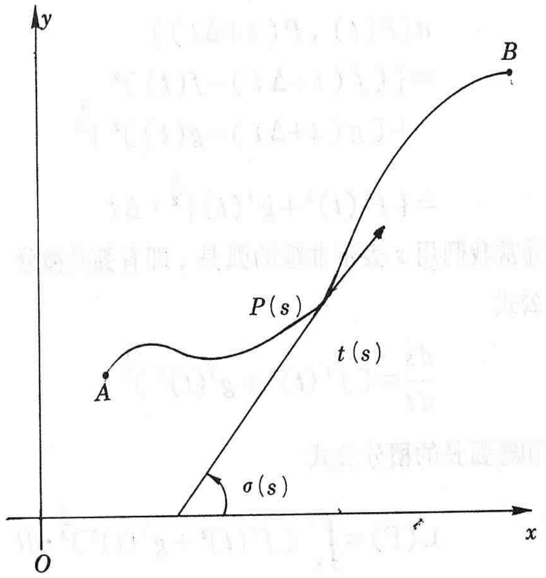
乃是Γ在$P(s)$ 點的單位長切向量，亦即動點在Γ上行走的速率（speed）恒等於 1。令 $\sigma(s)$爲 $\boldsymbol{t}(s)$的方位角，則有

$$\begin{cases}\varphi'(s)=\dfrac{dx}{ds}=\cos\sigma(s),\\[2ex] \phi'(s)=\dfrac{dy}{ds}=\sin\sigma(s)。\end{cases}$$

將上式微分，即得加速度向量$\boldsymbol{a}(s)=(\varphi''(s),$

$\psi''(s))$，

$$\begin{cases} \varphi''(s)=\dfrac{d^2x}{ds^2}=-\sin\sigma(s)\cdot\dfrac{d\sigma}{ds}, \\ \psi''(s)=\dfrac{d^2y}{ds^2}=\cos\sigma(s)\cdot\dfrac{d\sigma}{ds}。\end{cases}$$



由此可見 $\boldsymbol{a}(s)\cdot\boldsymbol{t}(s)=0$，亦即 $\boldsymbol{a}(s)$ 是一個垂直於 $\boldsymbol{t}(s)$ 的法向量，而且

$$\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$=[\cos^2\sigma(s)+\sin^2\sigma(s)]\cdot\frac{d\sigma}{ds}$$

$$=\frac{d\sigma}{ds}$$

定義： $\dfrac{d\sigma}{ds}=\dfrac{dx}{ds}\cdot\dfrac{d^2y}{ds^2}-\dfrac{dy}{ds}\cdot\dfrac{d^2x}{ds^2}$ 叫做曲線 Γ 在 $P(s)$ 點的曲率。

【例1】：

設 Γ 的曲率恒等於 0，則 Γ 是一條直線段。

證明：

由所設 $\dfrac{d\sigma}{ds}\equiv 0$，即有

$$\varphi''(s)=\frac{d^2x}{ds^2}=0\ ,$$

$$\psi''(s)=\frac{d^2y}{ds^2}=0$$

所以 $\varphi'(s)$，$\psi'(s)$ 是常數，亦即

$$\begin{cases} \varphi'(s)\equiv\cos\sigma(0)\ , \\ \psi'(s)\equiv\sin\sigma(0) \end{cases}$$

由此即得

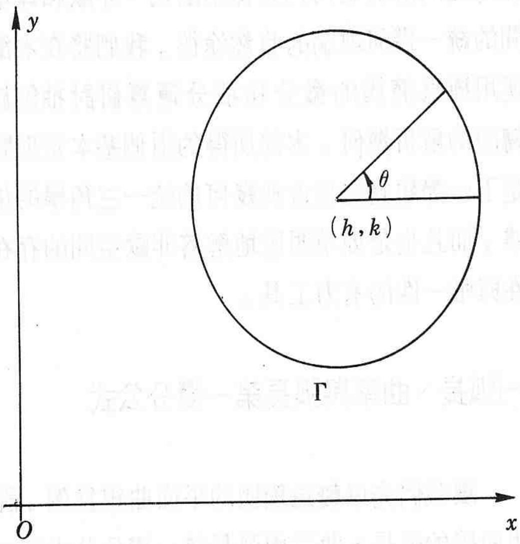
$$\varphi(s)=\varphi(0)+\cos\sigma_0\cdot s\ ,$$

$$\psi(s)=\psi(0)+\sin\sigma_0\cdot s$$

亦即 Γ 是一條由 $P(0)=(\varphi(0)\cdot\psi(0)$ 爲始點，以 σ_0 爲方位的直線段。

【例2】：

一個半徑爲 r 的圓的曲率恒等於 $\dfrac{1}{r}$。



證明： 設 Γ 是以 (h,k) 爲圓心，r 爲半徑的圓，易見

$$\begin{cases} x=h+r\cdot\cos\theta \\ y=k+r\cdot\sin\theta \end{cases},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$$

是它的一個參數表式（θ 爲其參數）。再者，由

$$\frac{ds}{d\theta}=\left[\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=r$$

可得 $s=r\cdot\theta$，亦即其弧長參數式爲

$$\begin{cases} x=h+r\cos\dfrac{s}{r}\ , \\ y=k+r\sin\dfrac{s}{r}。\end{cases}$$

再用直截了當的微分計算即得

$$曲率=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$=\frac{1}{r}\{\sin^2(\frac{s}{r})+\cos^2(\frac{s}{r})\}=\frac{1}{r}$$

【例 2′】：

曲率恒等於常數 C 的平面曲線一定是一段半徑為 $\frac{1}{|c|}$ 的圓弧。

證明： 由 $\frac{d\sigma}{ds}=c$ ，即得 $\sigma=c\cdot s+k$，我們可將平面座標作適當的轉軸使得上述 $\sigma(s)=c\cdot s$。如此即有

$$\begin{cases}\frac{dx}{ds}=\cos\sigma(s)=\cos(c\cdot s),\\ \frac{dy}{ds}=\sin\sigma(s)=\sin(c\cdot s)\ 。\end{cases}$$

將上述兩式積分，即得

$$\begin{cases}x=\frac{1}{c}\sin(c\cdot s)+a,\\ y=-\frac{1}{c}\cos(c\cdot s)+b\end{cases}$$

由此可見上述參數曲線乃是下述圓之圓弧：

$$(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{1}{c^2}\ 。$$

【例 3】：

設 $\Gamma=\{P(t)=(f(t),g(t);a\leqslant t\leqslant b\}$ 是一個給定參數曲線，$f(t)$，$g(t)$ 是二階連續可微的，則它在 $P(t_0)$ 點的曲率可以用下述公式直接計算之，即

$$P(t_0)\ 的曲率=\frac{f'(t_0)\cdot g''(t_0)-g'(t_0)\cdot f''(t_0)}{[f'(t_0)^2+g'(t_0)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

證明：

由直接的微分計算，即有

$$\frac{dt}{ds}=[\frac{ds}{dt}]^{-1}=[f'(t)^2+g'(t)^2]^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dt}{ds},\quad\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\cdot(\frac{dt}{ds})^2+\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2t}{ds^2},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{d^2y}{dt^2}\cdot(\frac{dt}{ds})^2+\frac{dy}{ds}\frac{d^2t}{ds^2}\ 。$$

用之直接代入曲率對於弧長參數的表達式，即有

$$曲率=\frac{dx}{ds}\cdot\frac{d^2y}{ds^2}-\frac{dy}{ds}\cdot\frac{d^2x}{ds^2}$$

$$=(\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2})\cdot(\frac{dt}{ds})^3$$

$$=\frac{f'(t)\cdot g''(t)-g'(t)\cdot f''(t)}{[f'(t)^2+g'(t)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

【例 4】：

如例 3 之所設，對於參數任給三個取值 t_0，t_1，t_2。令 $C(t_0,t_1,t_2)$ 為由 $P(t_0)$，$P(t_1)$，$P(t_2)$ 這曲線上三點所定的圓。試問當 $t_1,t_2\to t_0$ 為極限時，上述 $C(t_0,t_1,t_2)$ 是否有一個「極限圓」？

解：

讓我們用解析幾何和微分的均值定理來探討上述幾何問題。$C(t_0,t_1,t_2)$ 的方程式可以用行列式簡明地表為：

$$(1)\quad\begin{vmatrix}X^2+Y^2, & X, & Y, & 1\\ f(t_0)^2+g(t_0)^2, & f(t_0), & g(t_0), & 1\\ f(t_1)^2+g(t_1)^2, & f(t_1), & g(t_1), & 1\\ f(t_2)^2+g(t_2)^2, & f(t_2), & g(t_2), & 1\end{vmatrix}=0$$

〔直線想成是半徑無窮大的圓，上述方程式的軌跡顯然是圓或直線，而且它顯然過 $P(t_0)$，$P(t_1)$，$P(t_2)$。〕

現在讓我們先來看一看將 t_0，t_2 取定，而令 $t_1\to t_0$ 時 $C(t_0,t_1,t_2)$ 的「極限圓」的方程式如何求法，因為方程式(1)在 $t_1\to t_0$ 的極限乃是一個第二、第三行相同的行列式，所以是一個恒等於 0 者，亦即方程式(1)在 $t_1\to t_0$ 的極限是一個毫無用處的 $0=0$！克服上述

極限方程式「消失於無形」的辦法是先行查出爲什麼方程式(1)在 $t_1 \to t_0$ 時，它的所有係數都趨於 0 ？因爲其「病根」在於第三行趨於第二行爲極限，所以可以先用行列式的基本性質把第三行改爲第三行減去第二行之差，〔在下述計算中，我們將引入符號 $h(t)=f(t)^2+g(t)^2$ 〕亦即把第三行改爲：

$h(t_1)-h(t_0),\ f(t_1)-f(t_0),\ g(t_1)-g(t_0),\ 0$

在這裡就可以用上微分均值定理，把上述第三行改寫爲

$$(t_1-t_0)h'(\xi_1),\ (t_1-t_0)f'(\eta_1),\ (t_1-t_0)g'(\zeta_1),\ 0$$

其中 ξ_1，η_1，ζ_1 都是介於 t_0，t_1 之間的適當數值。由此可見方程式(1)即可變形爲：

$$(2)\quad (t_1-t_0)\cdot\begin{vmatrix} X^2+Y^2, & X, & Y, & 1 \\ h(t_0), & f(t_0), & g(t_0), & 1 \\ h'(\xi_1), & f'(\eta_1), & g'(\zeta_1), & 1 \\ h(t_2), & f(t_2), & g(t_2), & 1 \end{vmatrix}=0$$

上述運用行列式的變形和均值定理的計算業已徹底查出，極限方程式爲什麼會「消失於無形」的根源是方程式(1)其實含有一個因子 (t_1-t_0)！所以我們只要趕走 (t_1-t_0) 這個徒然攪局的小傢伙，亦即將(1)式乘以 (t_1-t_0) 的倒數，然後再求極限，即可得出極限圓 $C(t_0,t_0,t_2)$：

$$C(t_0,t_0,t_2)=\lim_{t_1\to t_0} C(t_0,t_1,t_2)$$

的方程式爲

$$(3)\quad \begin{vmatrix} X^2+Y^2, & X, & Y, & 1 \\ h(t_0), & f(t_0), & g(t_0), & 1 \\ h'(t_0), & f'(t_0), & g'(t_0), & 0 \\ h(t_2), & f(t_2), & g(t_2), & 1 \end{vmatrix}=0$$

現在讓我們接着用同樣的手法去求極限圓

$$\begin{aligned} C(t_0,t_0,t_0) &= \lim_{t_2\to t_0} C(t_0,t_0,t_2) \\ &= \lim_{t_1,t_2\to t_0} C(t_0,t_1,t_2) \end{aligned}$$

的方程式，我們不妨先用高階均值定理將第四行各項作下述變形，即

$$\begin{cases} h(t_2)=h(t_0)+(t_2-t_0)\cdot h'(t_0) \\ \qquad +\dfrac{(t_2-t_0)^2}{2}h''(\xi_2), \\ f(t_2)=f(t_0)+(t_2-t_0)\cdot f'(t_0) \\ \qquad +\dfrac{(t_2-t_0)^2}{2}f''(\eta_2), \\ g(t_2)=g(t_0)+(t_2-t_0)\cdot g'(t_0) \\ \qquad +\dfrac{(t_2-t_0)^2}{2}g''(\zeta_2) \end{cases}$$

其中 ξ_2，η_2，ζ_2 是介於 t_2，t_0 之間的適當數值。

將行列式(3)的第四行改爲其

(第四行)－(第二行)－$(t_2-t_0)\cdot$(第三行)

即可變形爲

$$(3)'\quad \frac{(t_2-t_0)^2}{2}\begin{vmatrix} X^2+Y^2, & X, & Y, & 1 \\ h(t_0), & f(t_0), & g(t_0), & 1 \\ h'(t_0), & f'(t_0), & g'(t_0), & 0 \\ h''(\xi_2), & f''(\eta_2), & g''(\zeta_2), & 0 \end{vmatrix}=0$$

同樣地先除去徒然攪局的小傢伙 $\dfrac{(t_2-t_0)^2}{2}$，再求極限即得極限圓 $C(t_0,t_0,t_0)$ 的方程式爲

$$(4)\quad \begin{vmatrix} X^2+Y^2, & X, & Y, & 1 \\ h(t_0), & f(t_0), & g(t_0), & 1 \\ h'(t_0), & f'(t_0), & g'(t_0), & 0 \\ h''(t_0), & f''(t_0), & g''(t_0), & 0 \end{vmatrix}=0$$

其中 $h'(t_0)=2f(t_0)f'(t_0)+2g(t_0)g'(t_0)$，$h''(t_0)=2\cdot[f(t_0)\cdot f''(t_0)+g(t_0)g''(t_0)+f'(t_0)^2+g'(t_0)^2]$

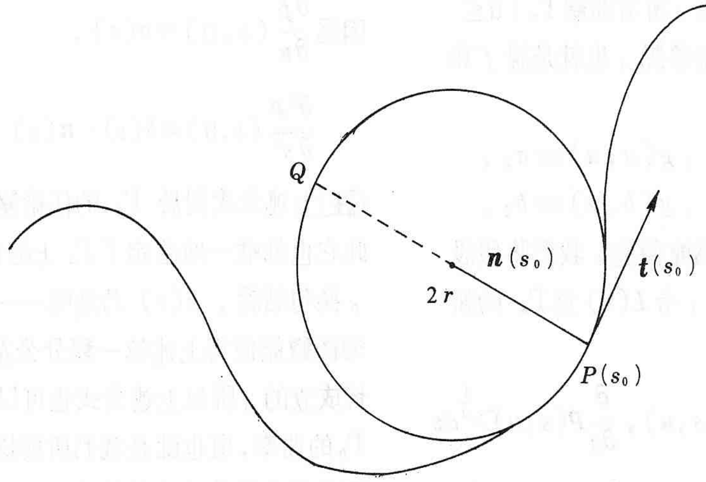
〔上述極限圓叫做曲線 Γ 在 $P(t_0)$ 點的密切圓 (osculating circle)。〕

【習題】：

試證上述密切圓的半徑等於曲線在 $P(t_0)$ 點的｜曲率｜的倒數，亦即密切圓和曲線在切點的曲率相同。

【提示】：

爲了便於計算，不妨設參數 t 根本就是弧長參數，亦即 $t=s$，$f'(t)^2+g'(t)^2\equiv 1$，



如上圖所示，$\overline{P(s_0)Q}$是它的直徑，則

$t(s_0)=(f'(s_0),g'(s_0))$是單位切向量

$n(s_0)=(-g'(s_0),f'(s_0))$是單位法向量

設密切圓的半徑爲r，則Q點的座標是

$$\begin{cases} X=f(t_0)-2rg'(s_0) \\ Y=g(t_0)+2rf'(s_0), \end{cases}$$

〔亦即$\overrightarrow{P(s_0)Q}=2r\cdot n(s_0)$〕

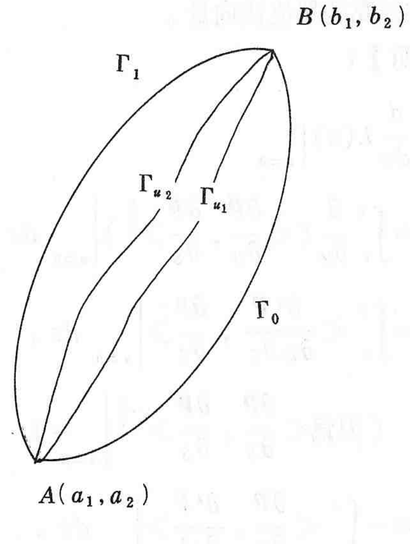
曲率與弧長第一變分公式：

在前面對曲率的討論中，同時涉及了弧長和切向量的方向，亦即曲率$=\dfrac{d\sigma}{ds}$，因爲方向的定義有賴於歐氏平面中的「平行性」（Parallelism），這是一般曲面所不再具有者，所以是不利於曲率概念的推廣的，是否可以消除這種不利於推廣的因素呢？換句話說，上述曲率概念是否能夠改成只用到弧長而不依賴於方向概念的刻劃方法呢？平面幾何中三角形的S.S.S.疊合條件充分顯示了角度實乃從屬於長度的本質。由此判斷，把曲率概念純化成單單用到弧長概念應該是有可能的！再者，直線段乃是最短通路，反之，愈是彎曲迂迴的通路所走的寃枉路也愈長；上述幾何直觀啓示我們曲率和弧長變分之間的關聯。長話短說，下面所要研討的就是弧長的第一變分公式，並且用它可以給出曲率概念只涉及弧長的刻畫。

設$\{\Gamma_u; 0\le u\le 1\}$是平面$A$，$B$爲始終點的一族連續變動的參數曲線，通常把它叫做$\Gamma_0$的一個變分（variation）。我們可以用下述具有二個參數(s,u)的位置向量$p(s,u)$作爲上述變分的解析表達式，即

$$p(s,u)=(f(s,u),g(s,u))$$

它的x，y分量$f(s,u)$和$g(s,u)$都是s，u這兩個參數的函數，$a\le s\le b$，$0\le u\le 1$，對於取定值$u=u_0$，



$$\begin{cases} x=f(s,u_0) \\ y=g(s,u_0) \end{cases}$$

就是曲線 Γ_{u_0} 的參數表式。所有曲線 Γ_u；$0\leq u\leq 1$ 都以 A，B 爲其始終點，也就是說 f 和 g 滿足下列邊界條件：

$$\begin{cases} f(a,u)\equiv a_1，g(a,u)\equiv a_2， \\ f(b,u)\equiv b_1，g(b,u)\equiv b_2。 \end{cases}$$

爲了使得往後的計算略爲簡便些，我們將假設 Γ_0 上的弧長參數就是 s，令 $L(u)$ 爲 Γ_u 的弧長，亦即

$$L(u)=\int_a^b <\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{p}(s,u),\frac{\partial}{\partial s}\mathbf{p}(s,u)>^{\frac{1}{2}}ds$$

$$=\int_a^b \{\frac{\partial f}{\partial s}(s,u)^2+\frac{\partial g}{\partial s}(s,u)^2\}^{\frac{1}{2}}ds$$

通常把 $\frac{d}{du}L(u)\Big|_{u=0}$ 叫做上述變分的弧長第一變分。

引理：歐氏平面的第一變分公式如下：

$$\frac{d}{du}L(u)\Big|_{u=0}$$

$$=-\int_a^b <\mathbf{v}(s),k(s)\mathbf{n}(s)>ds$$

其中 $\mathbf{v}(s)=\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{p}(s,o)$ 叫做變分向量場，$k(s)$ 是 Γ_0 在 $\mathbf{p}(s,o)$ 的曲率，$\mathbf{n}(s)$ 則是 Γ_0 在該點的單位法向量。

【證明】：

$$\frac{d}{du}L(u)\Big|_{u=0}$$

$$=\int_a^b \frac{\partial}{\partial u}(<\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial s},\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial s}>^{\frac{1}{2}})\Big|_{u=0}ds$$

$$=\int_a^b <\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial u\partial s},\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial s}>\Big|_{u=0}ds,$$

〔因爲 $<\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial s},\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial s}>^{-\frac{1}{2}}\Big|_{u=0}=1$〕

$$=-\int_a^b <\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial u},\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial s^2}>\Big|_{u=0}ds,$$

〔用了部分積分和邊界條件〕

$$=-\int_a^b <\mathbf{v}(s),k(s)\cdot\mathbf{n}(s)>ds$$

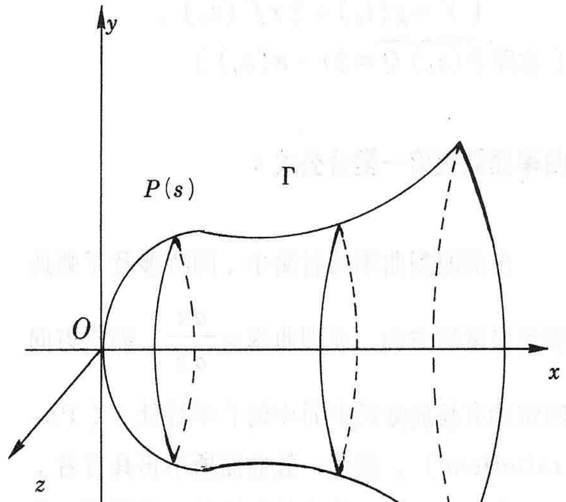
因爲 $\frac{\partial p}{\partial u}(s,0)=\mathbf{v}(s)$，

$$\frac{\partial^2\mathbf{p}}{\partial s^2}(s,0)=k(s)\cdot\mathbf{n}(s)。$$

〔註〕上述公式對於 Γ_0 的任給變分皆成立，因此它也就唯一地確定了 Γ_0 上的曲率函數 $k(s)$。換句話說，$k(s)$ 乃是唯一一個定義於 Γ_0上的函數能使得上述第一變分公左對於任何變分皆成立的。所以上述公式也可以用來定義曲線 Γ_0的曲率，這也就是我們所要探索的僅僅用到弧長概念的曲率定義法！

(二)旋轉面與抽象旋轉面

如下圖所示，設 Γ 是一條位於 x-y 上半平面內和 x- 軸垂直於原點0的二階平滑曲線



，亦即 Γ 具有二階可微的弧長參數表式

$$x=f(s)\ ,\ y=g(s)>0$$

而且滿足條件 $f(0)=g(0)=0$，$f'(0)=0$，$g'(0)=1$。

將上述曲線 Γ 繞着 x-軸在空間中旋轉所得的曲面 Σ 就是一個平滑的旋轉面（rotational surface）。例如當Γ就是 y-軸時，亦即 $x=f(s)\equiv 0$，$y=s$的情形，則所得的旋轉面就是 y-z 座標面。再者，如Γ是一個半圓時，則旋轉所得者就是一個球面。

【例1】：

$$x=R\left(1-\cos\frac{s}{R}\right),\quad y=R\sin\frac{s}{R}\ ;\ 0\leq s\leq \pi R$$

就是半徑爲R的半圓的弧長參數表式，其旋轉所得的曲面就是一個半徑爲R以$(R,0,0)$爲球心的球面。

Γ上的$P(s_0)=(f(s_0),g(s_0))$點繞 x-軸旋轉所得者就是一個位於$x\equiv f(s_0)$的平面上半徑等於$g(s_0)$的圓，它就是旋轉面和平面$x\equiv f(s_0)$的交截曲線。再者，下述「極座標」乃是用來研討旋轉面Σ上的解析幾何最爲自然簡便的座標系，即用(s,θ)作爲$P(s)$點旋轉θ弧度所到的那一點。

【例2】：

在上述Σ上的「極座標」爲(s,θ)的點，其(x,y,z)座標分別如下，即

$$x=f(s),\quad y=g(s)\cos\theta,$$
$$z=g(s)\sin\theta\ 。$$

【例3】：

設C是旋轉面Σ上以

$$s=\varphi(t),\quad \theta=\phi(t)$$

爲其極座標參數式的曲線，茲計算其曲線弧長微分如下：

$$\frac{dx}{dt}=f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

$$\frac{dy}{dt}=g'(\varphi(t))\cdot\cos\phi(t)\cdot\varphi'(t)$$
$$\quad -g(\varphi(t))\sin\phi(t)\cdot\phi'(t)$$

$$\frac{dz}{dt}=g'(\varphi(t))\cdot\sin\phi(t)\cdot\varphi'(t)$$
$$\quad +g(\varphi(t))\cos\phi(t)\,\phi'(t)$$

令λ爲C的弧長參數，則有

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$
$$=[f'(\varphi(t))^2+g'(\varphi(t))^2]$$
$$\cdot\varphi'(t)^2+g(\varphi(t))^2\cdot\phi'(t)^2$$
$$=\varphi'(t)^2+g(\varphi(t))^2\cdot\phi'(t)^2$$

改用微分符號表達，即有

$$d\lambda^2=\varphi'(t)^2dt^2+g(\varphi(t))^2\cdot\phi'(t)^2dt^2$$
$$=ds^2+g(s)^2\cdot d\theta^2$$

注意：在往後的討論中，我們將改用常用的(r,θ)〔而不是上述(s,θ)！〕作爲Σ上的極座標，而且恢復用s來表示Σ上的曲線C的弧長參數〔而不是上述λ！〕，用這樣改用後的符號，則旋轉面Σ上的曲線弧長微分公式爲：

(1) $$ds^2=dr^2+g(r)^2\cdot d\theta^2$$

其中$g(r)$ 是滿足下列條件的二階連續可微函數，即

$$\begin{cases} g(0)=0,\ g'(0)=1\ \text{而且} \\ g'(r)^2\leq 1\ \text{（相應於原先生成曲線}\Gamma\text{的條件}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\leq 1\text{）}\end{cases}$$

抽象旋轉面：

現在讓我們把上述旋轉面的概念略加擴充，定義一種叫做抽象旋轉面的幾何模型。

【定義】：

設$g(r)$，$0\leq r<\infty$（或$\leq b$）是一個定義在$[0,\infty)$或$[0,b]$上的二階連續可微函數，而且滿足

$$g(0)=0,\ g'(0)=1,\ g(r)>0$$

對於所有$0<r<\infty$皆成立（或$g(b)=0$，$g'(b)=-1$）。

令$M^2(g)$是以(r,θ)爲其極座標，以

$\widetilde{(1)}$ $$ds^2=dr^2+g(r)^2\,d\theta^2$$

爲其弧長微分公式的二維幾何模型，稱之爲以$g(r)$爲其本質函數的抽象旋轉面（Abstract

Rotational Surface ）。

註： 令R_{θ_0}：$M^2(g)\to M^2(g)$，其極座標變換公式爲

$$R_{\theta_0}(r,\theta)=(r,\theta+\theta_0)$$

它顯然是保長的（亦即保持ds^2不變者）自同構。由此可見$M^2(g)$ 是對於原點成旋轉對稱的，所以它是一種旋轉面，爲什麼稱之謂「抽象」旋轉面呢？因爲前述能夠實現爲歐氏空間中的旋轉面的本質函數$g(r)$乃是那種滿足$|g'(r)|\leqslant 1$者。換句話說，上述定義中還包含許多其本質函數不滿足上述條件者，它們是無法實現爲歐氏空間中的旋轉面的，因此總稱之謂抽象旋轉面。

設Γ是$M^2(g)$上的一條可微參數曲線，亦即

$$\Gamma=\{P(t)=(\varphi(t),\phi(t)),a\leq t\leq b\}$$

（$r=\varphi(t)$，$\theta=\phi(t)$爲其極座標參數式）則Γ的弧長可以用下述積分表達：

(2) $L(\Gamma)$

$$=\int_a^b\left[\varphi'(t)^2+g(\varphi(t))^2\cdot\phi'(t)^2\right]^{\frac{1}{2}}dt$$

【例子】：

(i) t 是弧長參數的充要條件是

$$\varphi'(t)^2+g(\varphi(t))^2\cdot\phi'(t)^2\equiv 1$$

(ii) $\Gamma=\{(r,\theta_0);0\leq a\leq r\leq b\}$，亦即$r=t$，$\theta=\theta_0$乃是連結$M^2(g)$上兩點$A(a,\theta_0)$，$B(b,\theta_0)$的「經線段」，（其經度恒等於$\theta_0$）其長度顯然就是$b-a$。再者，設$\Gamma$是$M^2(g)$上任給一條連結上述$A$，$B$兩點的可微參數曲線，則有

$$\Gamma=\{(\varphi(t),\phi(t));c\leq t\leq d\},$$

$$\varphi(c)=a,\varphi(d)=b,\phi(c)=\phi(d)=\theta_0。$$

由此可見

$L(\Gamma)$

$$=\int_c^d\left[\varphi'(t)^2+g(\varphi(t))^2\cdot\phi'(t)^2\right]^{\frac{1}{2}}dt$$

$$\geqslant\int_c^d|\varphi'(t)|dt\geqslant\int_c^d\varphi'(t)dt$$

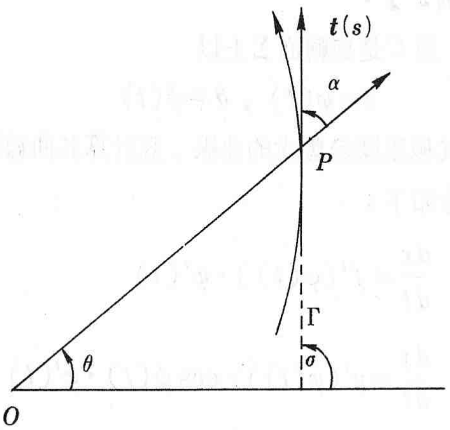
$$=\left[\varphi(t)\right]_c^d=b-a$$

所以連結A，B點的經線段乃是上述兩點之間的最短通路。

(iii) $\Gamma=\{(a,\theta);0\leq\theta\leq 2\pi\}$乃是$M^2(g)$上所有和原點的距離（亦即最短通路的長度）等於$a$的點所構成的「緯圈」，其長度等於$2\pi g(a)$。〔$\Gamma$的參數式可以取爲$r=a$，$\theta=t$ ，$0\leq t\leq 2\pi$，所以$L(\Gamma)=\int_0^{2\pi}g(a)\,dt=2\pi g(a)$〕這也就是$M^2(g)$的本質函數$g(r)$的幾何意義。

(iv) 對於$M^2(g)$任給異於原點的一點$P(r_0,\theta_0)$，經線$\theta=\theta_0$和緯圈$r=r_0$是過P點的兩條座標曲線。在$M^2(g)$的弧長微分式，亦即$ds^2=dr^2+g(r)^2d\theta^2$中，不含有$dr\cdot d\theta$ 項的幾何意義就是上述兩條座標曲線是互相垂直的。

(v) 當$g(r)=r$時$M^2(g)$ 就是我們最爲熟悉的歐氏平面，如下圖所示。令$P(s)$是Γ



上一點，$P(s)$的極座標爲（$r(s)$，$\theta(s)$）$\mathbf{t}(s)$是Γ在$P(s)$點單位切向量，$\alpha(s)$是$\mathbf{t}(s)$和矢徑$\overrightarrow{OP(s)}$之間的方位差，$\sigma(s)$是$\mathbf{t}(s)$的方位角，則有

$$\sigma(s)=\alpha(s)+\theta(s)\Rightarrow\frac{d\sigma}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}+\frac{d\theta}{ds}$$

$$\frac{dr}{ds}=\cos\alpha(s)\ ,\ r\cdot\frac{d\theta}{ds}=\sin\alpha(s)$$

【證明】：

$\sigma(s)=\alpha(s)+\theta(s)$就是歐氏平面三角形中熟知的外角等於內對角之和，所以顯然有曲率的極座標公式：

$$(3)\qquad 曲率=\frac{d\sigma}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}+\frac{d\theta}{ds}$$

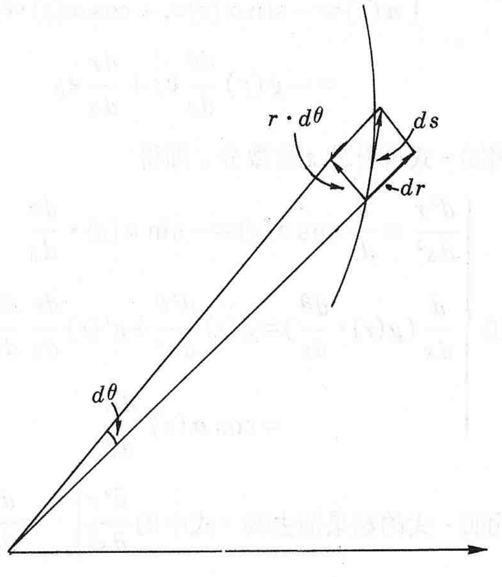
再者，由笛氏座標 (x,y) 和極座標 (r,θ) 之間的關係式：$x=r\cos\theta$ 和 $y=r\sin\theta$ 即有

$$\begin{cases}\cos\sigma=\dfrac{dx}{ds}=\dfrac{dr}{ds}\cdot\cos\theta-r\sin\theta\cdot\dfrac{d\theta}{ds}\ ,\\[2ex] \sin\sigma=\dfrac{dy}{ds}=\dfrac{dr}{ds}\cdot\sin\theta+r\cos\theta\cdot\dfrac{d\theta}{ds}\ 。\end{cases}$$

再用 $\alpha=\sigma-\theta$ 即得

$$(4)\qquad \begin{cases}\cos\alpha=\cos\sigma\cos\theta+\sin\sigma\sin\theta=\dfrac{dr}{ds}\ ,\\[2ex] \sin\alpha=\sin\sigma\cos\theta-\cos\sigma\sin\theta\\[1ex] \qquad=r\cdot\dfrac{d\theta}{ds}\ ,\end{cases}$$

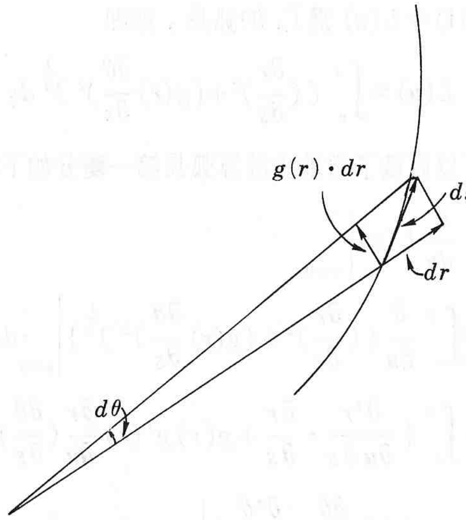
上述公式的幾何意義可以圖解如下：曲線的微段 ds 乃是一個以 dr 和 $r\cdot d\theta$ 爲其長寬的微小矩形的對角線。



（歐氏平面）

(vi) 在一段的抽象旋轉面 $M^2(g)$ 上，則曲線的微段 ds 乃是一個以 dr 和 $g(r)\,d\theta$ 爲其長寬的微小矩形的對角線，所以上述歐氏極座標的公式可以推廣爲：

$$(5)\qquad \begin{cases}\cos\alpha(s)=\dfrac{dr}{ds}\ ,\\[2ex] \sin\alpha(s)=g(r)\ \dfrac{d\theta}{ds}\end{cases}$$



〔$M^2(g)$〕

(三)抽象旋轉面的弧長第一變分公式與測地曲率

一個抽象旋轉面 $M^2(g)$ 的結構的要點就是可以用積分公式(2)計算其上任給一條可微曲線的弧長。由前段對於歐氏平面的曲率與弧長第一變分公式的討論，可見研究 $M^2(g)$ 上的弧長第一變分乃是探索其上曲線的「曲率」究竟應該如何定義的有效途徑。

【分析】：

(i) 設 $\{\Gamma_u,\ 0\le u\le 1\}$ 是 $M^2(g)$ 中一族保持始、終點不變的連續變形參數曲線，其參數表法如下，即對於任給 u，

$$\Gamma_u=\{(r(s,u),\theta(s,u)),\ a\le s\le b\}$$

其中 $r(s,u)$ 和 $\theta(s,u)$ 是定義於 $a\le s\le b$，$0\le u\le 1$，這個長方區域上的二元、二階可微函數，而且滿足下列條件：

$$(6)\quad\begin{cases} \left.\dfrac{\partial r}{\partial u}\right|_{u=a,b} \equiv 0\;,\quad \left.\dfrac{\partial \theta}{\partial u}\right|_{u=a,b} \equiv 0\;, \\ (\dfrac{\partial r}{\partial s}(s,0))^2+(g(r(s,0))^2\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial s}(s,0))^2 \\ \equiv 1 \end{cases}$$

〔上述第一個條件式的幾何意義是變分保持始、終點不變，第二個條件式的幾何意義則是 s 在 Γ_0 上是弧長參數。〕

(ii)今 $L(u)$ 爲 Γ_u 的弧長，亦即

$$(2)'\qquad L(u)=\int_a^b \left[(\frac{\partial r}{\partial s})^2+(g(r)\frac{\partial \theta}{\partial s})^2 \right]^{\frac{1}{2}} ds$$

我們可以直截了當地去計算弧長第一變分如下:

$$(7)\quad \begin{aligned} &\left.\frac{d}{du}L(u)\right|_{u=0} \\ &=\int_a^b \left.\frac{\partial}{\partial u}\{[(\frac{\partial r}{\partial s})^2+(g(r)\frac{\partial \theta}{\partial s})^2]^{\frac{1}{2}}\}\right|_{u=0}\cdot ds \\ &=\int_a^b \{\frac{\partial^2 r}{\partial u\partial s}\cdot\frac{\partial r}{\partial s}+g(r)g'(r)\frac{\partial r}{\partial u}(\frac{\partial \theta}{\partial s})^2 \\ &\qquad \left.+g(r)^2\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\partial s}\}\right|_{u=0}\cdot ds\;。\end{aligned}$$

〔在上述計算中，我們業已運用(6)中的第二條件式加以簡化，這也就是爲什麼附加上述條件的理由與好處！〕

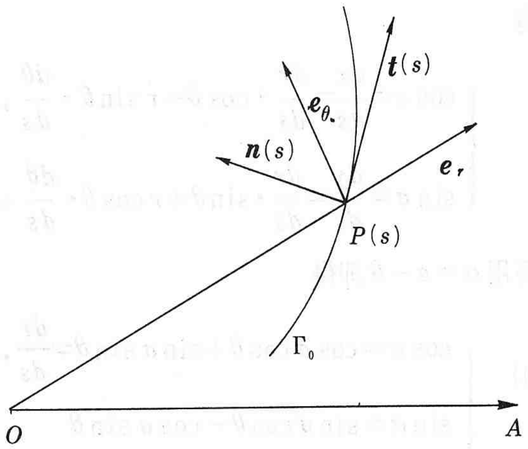
在上述積分中，所含有的兩個混合偏微分 $\frac{\partial^2 r}{\partial u\partial s}(s,0)$ 和 $\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\partial s}(s,0)$ 的幾何意義比較不明顯，所以我們要用部份積分公式把它們改用 $\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}(s,0)$ 和 $\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2}(s,0)$ 來取而代之，即有

$$(8)\quad \begin{aligned} &\left.\frac{d}{du}L(u)\right|_{u=0} \\ &=-\int_a^b \{\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial u}-g(r)g'(r)(\frac{\partial \theta}{\partial s})^2\frac{\partial r}{\partial u} \\ &\qquad +2g(r)g'(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \theta}{\partial s}\frac{\partial \theta}{\partial u} \\ &\qquad \left.+g(r)^2\frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2}\frac{\partial \theta}{\partial u}\}\right|_{u=0}\cdot ds \end{aligned}$$

〔在上述計算中，業已用到(6)中的第一條件式加以簡化。〕

(iii)現在讓我們接着來分析(8)式中各項的局部幾何意義。

如下圖所示：在 $M^2(g)$ 的 $P(s)$ 點的切面上，有兩組正交基：$\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta\}$ 和 $\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}(s)\}$。前者是由座標曲線的單位切向量所組成者，而後者則是由曲線 Γ_0 在 $P(s)$ 點的單位



切向量和法向量所組成者，兩者之間所差的是一個 $\alpha(s)$ 角的轉軸，亦即

$$(9)\quad \begin{cases} \boldsymbol{t}(s)=\cos\alpha(s)\,\boldsymbol{e}_r+\sin\alpha(s)\cdot\boldsymbol{e}_\theta \\ \qquad =\dfrac{dr}{ds}\boldsymbol{e}_r+g(r)\cdot\dfrac{d\theta}{ds}\boldsymbol{e}_\theta \\ \boldsymbol{n}(s)=-\sin\alpha(s)\boldsymbol{e}_r+\cos\alpha(s)\cdot\boldsymbol{e}_\theta \\ \qquad =-g(r)\dfrac{d\theta}{ds}\boldsymbol{e}_r+\dfrac{dr}{ds}\boldsymbol{e}_\theta \end{cases}$$

將(5)-式再對於 s 求微分，即得

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 r}{ds^2}=\dfrac{d}{ds}\cos\alpha(s)=-\sin\alpha(s)\cdot\dfrac{d\alpha}{ds} \\ \dfrac{d}{ds}(g(r)\cdot\dfrac{d\theta}{ds})=g(r)\dfrac{d^2\theta}{ds^2}+g'(r)\dfrac{dr}{ds}\dfrac{d\theta}{ds} \\ \qquad\qquad =\cos\alpha(s)\dfrac{d\alpha}{ds} \end{cases}$$

用(10)-式的結果消去(8)-式中的 $\left.\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\right|_{u=0}=\frac{d^2 r}{ds^2}$

和$\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}\Big|_{u=0}=\frac{d^2\theta}{ds^2}$即得下述基本公式。

定理1： 在$M^2(g)$中的曲線弧長第一變分公式如下：

$$\frac{d}{du}L(u)\Big|_{u=0}$$

$$=-\int_a^b\{-\sin\alpha\left[\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}\right]\cdot\frac{\partial r}{\partial u}\Big|_{u=0}$$

(11) $$+\cos\alpha\cdot\left[\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}\right]$$

$$\cdot g(r)\frac{d\theta}{\partial u}\Big|_{u=0}\}ds$$

$$=-\int_a^b\left(\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}\right)<\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{v}(s)>ds$$

其中$\boldsymbol{v}(s)=\left(\frac{\partial r}{\partial u}\Big|_{u=0}\right)\cdot\boldsymbol{e}_r+\left(g(r)\cdot\frac{\partial\theta}{\partial u}\Big|_{u=0}\right)\cdot\boldsymbol{e}_\theta$就是變分向量場(variational vector field)，$<\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{v}(s)>$則表示它和單位法向量的內積。

【證明】：

由(5)-式和(10)-式即可得

$$\left\{\frac{\partial^2 r}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial u}-g(r)g'(r)\left(\frac{\partial\theta}{\partial s}\right)^2\cdot\frac{\partial r}{\partial u}\right\}\Big|_{u=0}$$

$$=-\sin\alpha\cdot\left(\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}\right)\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial u}\Big|_{u=0}\right),$$

$$\{2g(r)\cdot g'(r)\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial\theta}{\partial s}\frac{\partial\theta}{\partial u}+g(r)^2\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}$$

$$\cdot\frac{\partial\theta}{\partial u}\}\Big|_{u=0}$$

$$=\cos\alpha\cdot\left(\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}\right)\cdot g(r)$$

$$\cdot\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\Big|_{u=0}\right)$$

將上述兩式代入(8)-式即得(11)-式的前半。再者，假如我們用$\frac{\partial}{\partial r}$表示參數曲線，$r=t$，$\theta$=常數的速度向量，以$\frac{\partial}{\partial\theta}$表示$r$=常數$>0$，$\theta=t$的速度向量，則有

(12) $$\begin{cases}\boldsymbol{v}(s)=\left(\frac{\partial r}{\partial u}\Big|_{u=0}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\Big|_{u=0}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta},\\ \frac{\partial}{\partial r}=\boldsymbol{e}_r\ (\text{因爲}\ \frac{\partial}{\partial r}\ \text{是單位長的}),\\ \frac{\partial}{\partial\theta}=g(r)\,\boldsymbol{e}_\theta\ (\text{因爲}\ \frac{\partial}{\partial\theta}\ \text{的長度是}\ g(r))\end{cases}$$

由此即得幾何意義簡明的弧長第一變分公式：

$$\frac{d}{du}L(u)\Big|_{u=0}$$

(11)' $$=-\int_a^b\left(\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}\right)\cdot<\boldsymbol{n}(s),\boldsymbol{v}(s)>ds$$

〔證畢〕

上述公式是歐氏平面（亦即$g(r)=r$的特殊情形）弧長第一變分公式的推廣。由此可見，上述公式之中的相當因式$\left(\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}\right)$就是曲線的曲率在$M^2(g)$中的自然推廣。

【定義】：

對於$M^2(g)$上的任給二階可微曲線Γ，其上一點的**測地曲率**（geodesic curvature）定義爲$\left(\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}\right)$在該點所取之值。

【定義】：

在$M^2(g)$上一條其測地曲率恒等於零的曲線叫做$M^2(g)$上的一條**測地線**（geodesic curve）。

易見測地線乃是歐氏平面中的直線的自然推廣，而

(13) $$\begin{cases}\frac{dr}{ds}=\cos\alpha,\ \frac{d\theta}{ds}=\frac{\sin\alpha}{g(r)}\\ \frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}=0\end{cases}$$

則是$M^2(g)$上的測地線的特徵常微分方程。

【例1】：

對於$M^2(g)$中的一條經線，亦即其弧長參數表示爲$r=s$，θ=常數者也，顯然有

$$\frac{dr}{ds}=\cos\alpha\equiv 1\ ,\ \frac{d\theta}{ds}\equiv 0\Rightarrow\alpha\equiv 0$$

所以是顯然滿足方程的，即

$$\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\ \frac{d\theta}{ds}=0$$

所以經線都是$M^2(g)$中的測地線的特例。

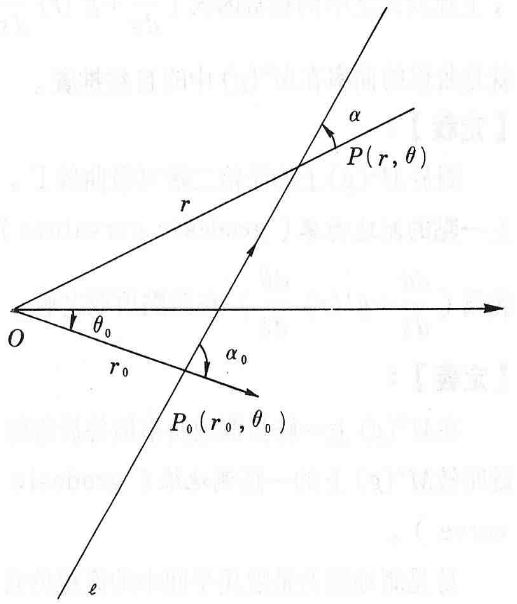
【例2】：

在$g(r)=r$的情形，$M^2(g)$ 就是歐氏平面，其測地線方程爲

$$\frac{d\sigma}{ds}=\frac{d\alpha}{ds}+\frac{d\theta}{ds}=0\Rightarrow\sigma=\text{常數}$$

亦即其切向量的方位角恒等於某一定值，所以其測地線也就是原先的直線。

設ℓ是一條不過原點O的直線，它和過其上兩點$P_0(r_0,\theta_0)$和$P(r,\theta)$ 的矢徑之間的



夾角分別是α_0和α，由ΔOP_0P 的正弦定律可得

$$\frac{\sin\alpha_0}{r}=\frac{\sin(\pi-\alpha_0)}{r}=\frac{\sin\alpha}{r_0},$$

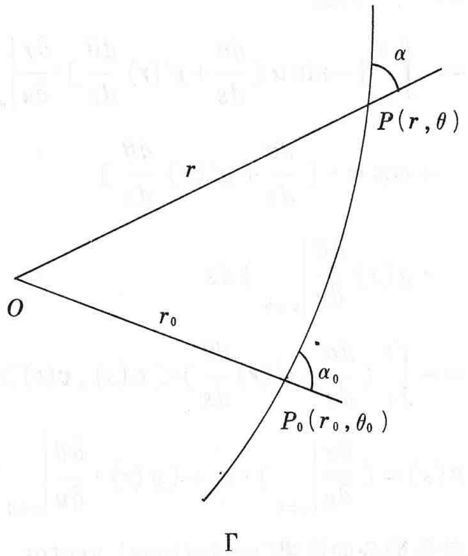
亦即 $r_0\sin\alpha_0=r\sin\alpha$

由此可見，直線在歐氏平面的極座標中滿足條件

$$r\sin\alpha=\text{常數}$$

【例3】：

在$g(r)=\sin r$的情形，$M^2(g)$就是單位球面，如圖所示，設Γ是其上一個不過「原點」O的大圓（亦即Γ不是「經圓」），$P_0(r_0,\theta_0)$和$P(r,\theta)$爲其上任取兩點，α_0和α則



爲它和經度是θ_0和θ的經圓的交角。同樣地由球面三角的正弦定律，即有

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin r}=\frac{\sin(\pi-\alpha_0)}{\sin r}=\frac{\sin\alpha}{\sin r_0}$$

$$\Rightarrow\sin r\sin\alpha=\sin r_0\sin\alpha_0$$

由此可見，單位圓上的任給大圓均滿足

(14) $\sin r\sin\alpha=\text{常數}$。

反之，設Γ是任給一條滿足(14)式的曲線。將上述條件式對於弧長參數s微分，即得

(15) $$\cos r\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\sin\alpha+\sin r\cdot\cos\alpha\ \frac{d\alpha}{ds}=0$$

再用$\cos\alpha=\dfrac{dr}{ds}$，$\sin\alpha=g(r)\cdot\dfrac{d\theta}{ds}=\sin r\cdot\dfrac{d\theta}{ds}$代入，即得

(15)' $$\sin r\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\left(\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\ \frac{d\theta}{ds}\right)\equiv 0,$$

$$g'(r)=\cos r$$

由此可見，Γ有兩種可能性，即

(i) $\frac{dr}{ds}\equiv 0 \Rightarrow r=$常數，$\alpha\equiv\frac{\pi}{2}$；Γ是一個緯圈。

(ii) $\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}\equiv 0$，Γ是$M^2(g)$上的測地線。

由此易見單位球面，亦即$M^2(g)$：$g(r)=\sin r$上的測地線也就是其上的大圓。（讀者試自驗證之）

㈣抽象旋轉面的廣義正弦、餘弦定律

定理 2： 設Γ是$M^2(g)$上的一條測地線，亦即它滿足微分方程$\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}=0$，則

(16) $\quad g(r(s))\cdot\sin\alpha(s)=$常數。

【證明】：

直截了當地將$g(r(s))\cdot\sin\alpha(s)$對於Γ上的弧長參數$s$微分，即得

$$\frac{d}{ds}(g(r(s))\cdot\sin\alpha(s))$$

$$=g'(r)\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\sin\alpha+g(r)\cdot\cos\alpha\cdot\frac{d\alpha}{ds}$$

再用$\cos\alpha=\frac{dr}{ds}$和$\sin\alpha=g(r)\cdot\frac{d\theta}{ds}$代入即得

$$\frac{d}{ds}(g(r(s))\cdot\sin\alpha(s))$$

$$=g(r)\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\left[\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}\right]\equiv 0$$

所以$g(r(s))\cdot\sin\alpha(s)$是一個常數。

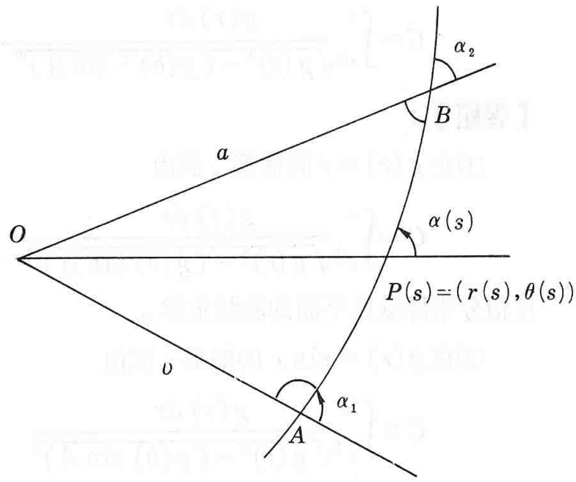
推論 1：（$M^2(g)$上的正弦定理）對於$M^2(g)$上的測地線三角形ΔOAB，恒有

(17) $\quad \frac{\sin A}{g(a)}=\frac{\sin B}{g(b)}$ 。

【證明】：

將定理 2 用到過A，B點的這種測地線，即有

$$g(b)\cdot\sin\alpha_1=g(a)\sin\alpha_2\text{ ，}$$



$$A=\pi-\alpha_1\text{ ，}B=\alpha_2$$

由此即得$g(b)\sin A=g(a)\sin B$，亦即

$$\frac{\sin A}{g(a)}=\frac{\sin B}{g(b)}$$

注意：上述廣義正弦定理，一般地只有在三角形中的頂點O是$M^2(g)$的原點時才成立！在這種情形ΔOAB的兩邊$\overline{OA}$，$\overline{OB}$就簡化成「矢徑」。

推論 2：（$M^2(g)$上的餘弦定理）對於上述$M^2(g)$上的測地線三角形ΔOAB，恒有$c=\overline{AB}$的弧長的積分公式

(18) $\quad c=\int_b^a\frac{g(r)\,dr}{\pm\sqrt{g(r)^2-(g(b)\cdot\sin A)^2}}$

【證明】：

設$P(s)=(r(s),\theta(s))$是測地線段$\overline{AB}$上的動點，$0\leq s\leq C$，則有

(19) $\quad \frac{dr}{ds}=\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

再用定理 2 由(16)-式，亦即

$$g(r)\sin\alpha=g(b)\sin A$$

解得$\sin\alpha$代入(19)-式，即有

$$\frac{dr}{ds}=\frac{\pm\sqrt{g(r)^2-(g(b)\sin A)^2}}{g(r)}$$

亦即 $\quad ds=\frac{g(r)\cdot dr}{\pm\sqrt{g(r)^2-(g(b)\sin A)^2}}$

兩端求積分即得公式

$$C=\int_{b}^{a}\pm\frac{g(r)\,dr}{\sqrt{g(r)^2-(g(b)\cdot\sin A)^2}}$$

【習題】：

(1)在 $g(r)=r$ 的情形，試由

$$C=\int_{b}^{a}\pm\frac{g(r)\,dr}{\sqrt{g(r)^2-(g(b)\sin A)^2}}$$

用積分求得歐氏平面的餘弦定律。

(2)在 $g(r)=\sin r$ 的情形，試由

$$C=\int_{b}^{a}\pm\frac{g(r)\,dr}{\sqrt{g(r)^2-(g(b)\sin A)^2}}$$

用積分求得球面三角的餘弦定律。

(3)在 $g(r)=\sinh r$ 的情形，用類似於習題(2)的積分計算，試求 $M^2(\sinh r)$ 上的餘弦定律。（它也就是非歐幾何中的餘弦定律！）

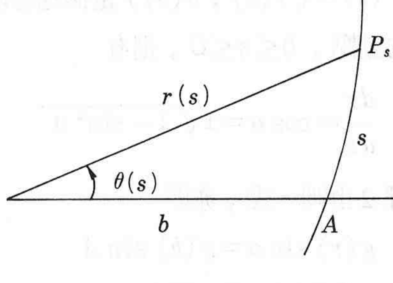
【提示】：

在 $g(r)=\sin r$ 的情形，$M^2(g)$ 就是單位球面，由已知的球面三角餘弦定律已知下述三角形 ΔOAP_s 中

$$\cos r(s)=\cos b\cos s+\sin b\sin s\cos A$$

所以(2)的求積結果應該就是上述關係式所確定的 $r(s)$。換句話說，它的微分所得關係式應該就是

$$ds=\pm\frac{\sin r\,dr}{\sqrt{\sin^2 r-\sin^2 b\sin^2 A}}$$



再者，由於 $\sinh r$ 和 $\sin r$ 之間的密切關聯，可以「猜想」到 $M^2(\sinh r)$ 上的相應積分所得的關係式應該是

$$\cosh r(s)=\cosh b\cosh s-\sinh b\sinh s\cos A$$

所以可以同樣地用微分反求說明上述關係式的微分所得者就是

$$ds=\pm\frac{\sinh r\,dr}{\sqrt{\sinh^2 r-\sinh^2 b\sin^2 A}}$$

(4)試用積分公式表達 $\theta(s)$。

【提示】：

$$g(r)\frac{d\theta}{ds}=\sin\alpha(s),$$

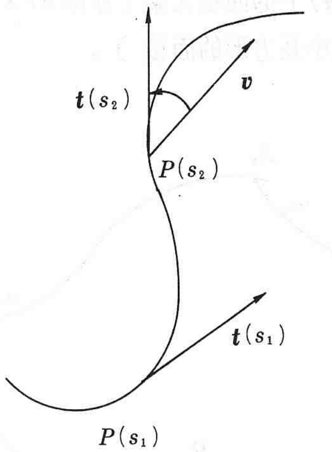
$$g(r)^2\frac{d\theta}{ds}=g(r)\cdot\sin\alpha(s)$$

$$(=g(b)\sin A)$$

(五) $M^2(g)$ 上的平行移動、二維曲率與高斯伯內公式：

前面的討論的基本想法是把歐氏平面曲線的曲率函數和弧長第一變分之間的緊密關聯，推廣到任給一個抽象旋轉面 $M^2(g)$。所以具體做法是直接由 $M^2(g)$ 上的曲率弧長積分公式，去推導 $M^2(g)$ 上的弧長第一變分公式，從而發現函數 $k(s)=\dfrac{d\alpha}{ds}+g'(r)\dfrac{d\theta}{ds}$ 在所求得的弧長第一變分公式中，扮演着一如平面曲線的曲率完全同樣的角色，這樣也就可以順理成章地把上述函數定義爲 $M^2(g)$ 上曲線的（測地）曲率函數，採取這種辦法來「捕捉」曲率概念的主要原因是因爲在 $M^2(g)$ 上還沒有切向量的「平行移動」（Parallelism）的概念（亦即到目前本文還沒有加以適當的定義），所以一條曲線 Γ 上相異兩點 $P(s_1)$、$P(s_2)$ 的單位切向量 $\mathbf{t}(s_1)$，$\mathbf{t}(s_2)$ 之間的方向差也還沒有妥加定義。（注意 $\mathbf{t}(s_1)$，$\mathbf{t}(s_2)$ 乃是分居於 $M^2(g)$ 在 $P(s_1)$，$P(s_2)$ 點的各別切空間之中的向量！）因此，也就無法採用像歐氏平面中比較直觀的 $k(s)=\dfrac{d\sigma}{ds}$ 這種定義，本段的想法是：既然我們業已確立了 $M^2(g)$ 上曲線的曲率函數：

(20) $$k(s)=\frac{d\alpha}{ds}+g'(r)\frac{d\theta}{ds}$$



爲什麼不試着用曲率函數 $k(s)$ 反過來定義 $t(s_1)$，$t(s_2)$之間的方向差呢?一個自然而且言之成理的做法是把

$$\Delta(s_1, s_2) = \int_{s_1}^{s_2} k(s)\,ds$$

定義爲 $t(s_2)$和 $t(s_1)$之間所「應有」的方向差，並且把那個和 $t(s_2)$ 在同一切空間中而且和$t(s_2)$之間的夾角恰好是等於$\Delta(s_1, s_2)$的單位切向量 v 定義爲：$t(s_1)$沿着曲線Γ由$P(s_1)$點「平行移動」到$P(s_2)$點者。要注意的是上面這樣所定義的「平移」是依賴於曲線Γ的！換句話說，我們完全可以採用上述辦法來定義沿着一條曲線的平移，只不過它乃是一種有賴於沿用的曲線的平行移動，是不能保證沿着兩條具有相同的始、終點的通路所作的平移會有相同的結果的！總之，且讓我們沿着這個思路探索下去，看一看會有些什麼有意思的事物蘊涵于其中？

【定義】：

設Γ是$M^2(g)$中一條以A，B爲始、終點的平滑曲線，$k(s)$ 是Γ的（測地）曲率函數，對於$M^2(g)$在A點（對應於 $s=a$ ）的一個切向量 v，它沿着Γ由A點平移到B點（對應於 $s=b$ ）的結果是一個$M^2(g)$在B點切向量，$\tau_\Gamma(v)$，其定義如下：

(21) $\begin{cases} \tau_\Gamma(v) \text{ 和 } v \text{ 等長，} \\ \tau_\Gamma(v) \text{ 和 } t(b) \text{ 的夾角} \end{cases}$

$$= v \text{ 和 } t(a) \text{ 的夾角} - \int_a^b k(s)\,ds$$

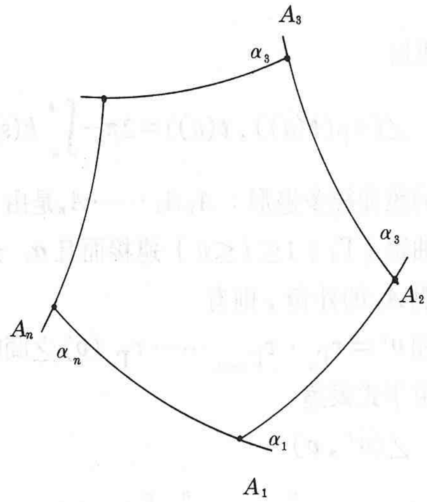
往後我們將用$\Gamma[s_1, s_2]$ 表示將曲線Γ的參數限制在 $s_1 \leq s \leq s_2$ 的這樣一段。

【分析】：

(i) 採用上述定義，一條測地線Γ上各點的單位切向量，$t(s)$ 是沿着Γ互相平行的，亦即

$$t(s_2) = \tau_{\Gamma[s_1, s_2]}(t(s_1))$$

(ii) 設多邊形$A_1A_2A_3\cdots\cdots A_n$ 是由n段測地線$\{\Gamma_i;\ 1\leq i\leq n\}$所圍成者，$\alpha_i$ 是它



在A_i點的外角，則有

(22) v 和 $\tau_{\Gamma_n}\cdot\tau_{\Gamma_{n-1}}\cdots\cdots\tau_{\Gamma_2}\cdot\tau_{\Gamma_1}(v)$ 之間的夾角$= 2\pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ 。

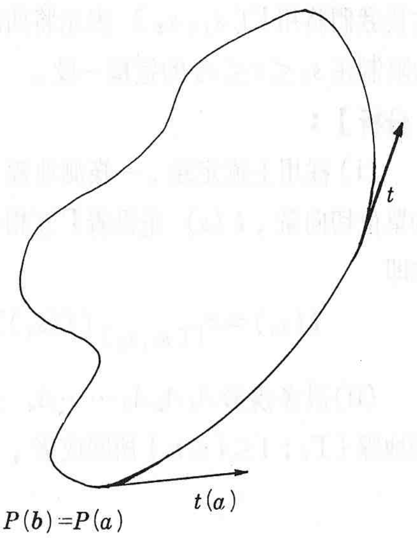
【說明】：

令 t_i 是Γ_i在A_i點的切向量 t'_i 是Γ_i在A_{i+1}點的切向量（$A_{n+1}=A_1$）。則有

$$\text{外角}\ \alpha_i = \angle(t'_i, t_i),$$
$$t'_i = \tau_{\Gamma_i}(t_i)$$

可以取用 $v=t_1$ ，然後逐步用(21)式即可得出(22)式。

(iii) 設$\Gamma=\{P(s);\ a\leq s\leq b\}$ 是一條平滑的閉曲線。則$\angle(t(a), t(b))$應該看成是



2π。所以

$$\angle(\tau_{\Gamma}(\boldsymbol{t}(a)),\boldsymbol{t}(a))=2\pi-\int_a^b k(s)ds。$$

(iv)設曲線多邊形：$A_1A_2\cdots\cdots A_n$是由n段平滑曲線$\{\Gamma_i;1\leq i\leq n\}$連接而且$\alpha_i$是它在角點$A_i$的外角，則有

$\boldsymbol{v}$和$\boldsymbol{v}'=\tau_{\Gamma_n}\cdot\tau_{\Gamma_{n-1}}\cdots\cdots\tau_{\Gamma_1}(\boldsymbol{v})$之間的夾角可用下式表達

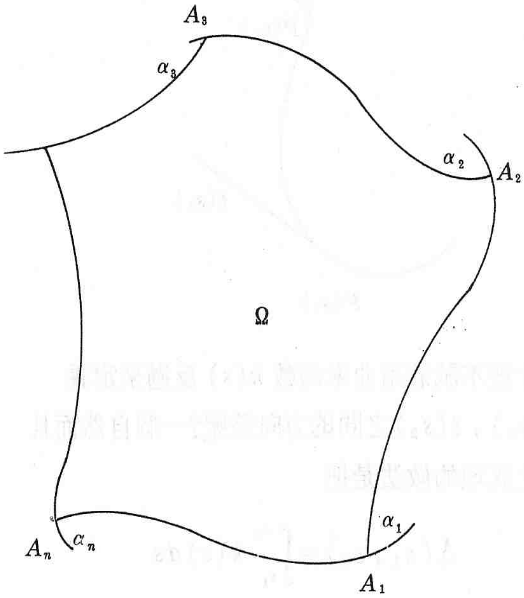
(23) $$\angle(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v})=2\pi-\sum_{i=1}^n\alpha_i-\sum_{i=1}^n\int_{\Gamma_i}k(s)ds$$

註：當Ω是一個多邊形所圍成的區域，我們通常把$\sum_{i=1}^n\int_{\Gamma_i}k(s)ds$改寫成$\int_{\partial\Omega}k(s)ds$，亦即用$\int_{\partial\Omega}$表示沿着正向邊界$\partial\Omega$所作的積分。

定理3：（高斯、伯內公式，Gauss-Bonnet Formula）設Ω是$M^2(g)$中的一個區域，其邊界$\partial\Omega$是一個分段平滑的多邊形。則恒有下述高斯、伯內公式：

(24) $$2\pi-\sum_{i=1}^n\alpha_i-\int_{\partial\Omega}k(s)ds=\iint_\Omega KdA$$

其中$K=K(r,\theta)=-\dfrac{g''(r)}{g(r)}$叫做$M^2(g)$在$(r,\theta)$點的高斯曲率。$dA=g(r)\,dr\wedge d\theta$則是$M^2(g)$上的面積元素（亦即$dr\times g(r)d\theta$的那個微小長方形的面積）。



證明：

(25) $$\int_{\partial\Omega}k(s)\,ds$$
$$=\sum_{i=1}^n\int_{\Gamma_i}[\,d\alpha+g'(r)\,d\theta\,]$$
$$=\sum_{i=1}^n\int_{\Gamma_i}d\alpha+\int_{\partial\Omega}g'(r)\,d\theta$$

由α和外角α_i的定義可以看出

(26) $$\sum_{i=1}^n\int_{\Gamma_i}d\alpha+\sum_{i=1}^n\alpha_i=2\pi$$

再者，由格林定理可得

(27) $$\int_{\partial\Omega}g'(r)\,d\theta=\iint_\Omega g''(r)\,dr\wedge d\theta$$
$$=\iint_\Omega\frac{g''(r)}{g(r)}\,dA$$

結合上述三式，即得

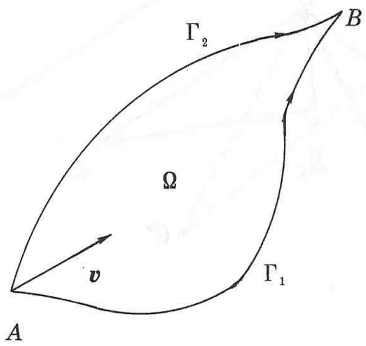
$$2\pi-\sum_{i=1}^n\alpha_i-\int_{\partial\Omega}k(s)\,ds$$
$$=\iint_\Omega\left(-\frac{g''(r)}{g(r)}\right)dA=\iint_\Omega KdA$$

〔證畢〕

【註】：

上述高斯、伯內公式的左邊的幾何意義就是在$M^2(g)$上繞$\partial\Omega$作平行移動一週後，和起始向量之間的夾角。由此可見右邊的面積分恰好就是度量着「$M^2(g)$上沿曲線作平行移動」對於選用路線的依賴性：如下圖所示，設Γ_1，Γ_2是兩條由A點到B點的路線。則有

$$\angle(\tau_{\Gamma_1}(\boldsymbol{v}),\tau_{\Gamma_2}(\boldsymbol{v}))$$
$$=\angle(\tau_{\Gamma_2}^{-1}\cdot\tau_{\Gamma_1}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v})=\iint_\Omega K\,dA$$



再者，上述積分公式也就揭示了高斯曲率K的本質性幾何意義（the intrinsic geometric meaning of K）；它度量着$M^2(g)$的局部結構上和歐氏平面的局部結構在「平行移動」上的差別，這是高斯在研究曲面論上偉大的得意傑作。上面只是對於抽象旋轉面這種特殊「曲面」，給出簡樸的論述。

【例1】：

歐氏平面，亦即$M^2(g)$：$g(r)=r$的高斯曲率恒等于0，即

$$g(r)=r\Rightarrow K=-\frac{g''(r)}{g(r)}\equiv 0$$

【例2】：

半徑是ρ的球面，亦即$M^2(g)$：$g(r)=\rho\cdot\sin\dfrac{r}{\rho}$，的高斯曲率恒等於$\dfrac{1}{\rho^2}$，即

$$g(r)=\rho\cdot\sin\frac{r}{\rho}\Rightarrow K=-\frac{g''(r)}{g(r)}=\frac{1}{\rho^2}\ 。$$

【例3】：

當$g(r)=\rho\sinh\dfrac{r}{\rho}$時，則$M^2(g)$的高斯曲率恒等於$-\dfrac{1}{\rho^2}$，即

$$g(r)=\rho\sinh\frac{r}{\rho}\Rightarrow K=-\frac{g''(r)}{g(r)}=-\frac{1}{\rho^2}$$

【例4】：

反之，設$M^2(g)$的高斯曲率恒等於常數C，則$g(r)$滿足下列微分方程和初值條件，即

$$(28)\quad\begin{cases} g''(r)+C\,g(r)=0\ , \\ g(0)=0\ ,\ g'(0)=1\ 。\end{cases}$$

不難證明(28)-式的唯一解就是：

$$\begin{cases} C=0\Rightarrow g(r)=r\ , \\ C>0\Rightarrow g(r)=\dfrac{1}{\sqrt{C}}\sin\sqrt{C}\,r\ , \\ C<0\Rightarrow g(r)=\dfrac{1}{\sqrt{-C}}\sinh\sqrt{-C}\,r \end{cases}$$

【習題】：

(1)試證上述所給者乃是滿足(28)-式的唯一解。

(2)對於例2的情形，研討一個測地線三角形的內角和與它的面積之間的關係。

(3)對於例3的情形研討一個測地線三角形的內角和與它的面積之間的關係。

(4)在例3的情形，測地線三角形的面積是否有一個上限？

第四節　歐氏、球與双曲(非歐)空間的統一理論

歐氏、球與雙曲（非歐）空間的主要共同之點在於它們都具有同樣的疊合性質（congruence properties），亦即等長測地線段、等角度的角區及具有兩邊一夾角（S.A.S.）對應相等的三角形之間的相互疊合；這其實也就是它們所共有的豐富的對稱性在基本幾何事

物（線段、角、三角形）上的具體表現，從上一節所討論的抽象旋轉面的範疇來看，二維的歐氏、球面與非歐空間乃是那種對於每一點皆具有旋轉對稱性的**齊性抽象旋轉面**（homogeneous abstract rotational surfaces）本節將以上一節所建立起來的抽象旋轉面的基礎理論，對於上述三種古典幾何學給出一個有系統的統一研討。

三角形是上述三種幾何中的最重要的精簡事物，三角形的幾何則是古典幾何的精要與基礎所在，例如定量幾何的要點和解析幾何的基礎就在於總結三角形的角邊之間的函數關係的正、餘弦定律。當年 Jónas Bolyai 所發現的三種幾何的正弦定律的統一形式，亦即

$$\frac{\sin A}{\odot a}=\frac{\sin B}{\odot b}=\frac{\sin C}{\odot c}$$

即已啓示着本節即將討論的統一理論的可能性。再者，這三種幾何的大同和小異其實也都完全表現在三角形上；其大同者就是三角形的疊合性質是同樣的，而其小異則在於三角形的內角和分別爲恒等於、恒大於和恒小於一個平角。由第二節的討論可見，三角形的內角和問題其實也就是困擾幾何學界達兩千年之久的「平行公設」問題。本節的統一研討也對於上述問題提供了一種簡潔明快的解答與理解。

(一)疊合與對稱：

在歐氏幾何中，我們業已熟知由疊合公理去推導平面對於其上任給直線和空間對於其中任給平面的反射對稱性，因爲球面幾何和非歐幾何中也有完全同樣的疊合公理，所以也可以用完全同樣的論證推導球空間和非歐空間也具有同樣豐富的反射對稱性（reflectional symmetries)。其實，也完全可以用反射對稱性反過來推導疊合性。茲以歐氏平面的情形作爲一個典型的例子說明如下：

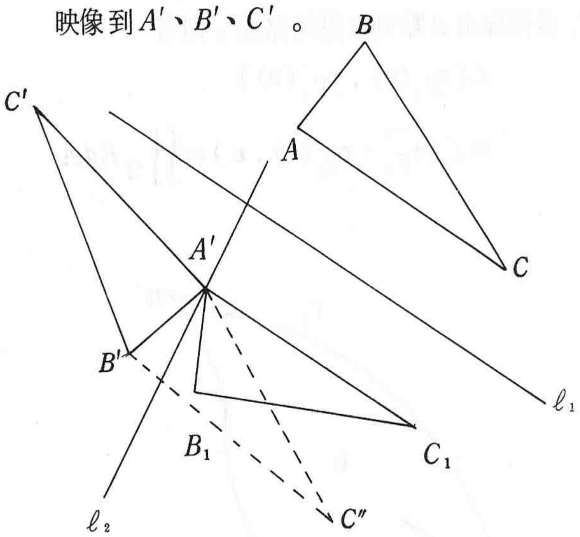
【例1】：

設ΔABC和$\Delta A'B'C'$是歐氏平面中兩個具有兩邊一夾角對應相等的三角形，即有

$\overline{AB}$，$\overline{AC}$分別和$\overline{A'B'}$，$\overline{A'C'}$等長和

$\angle A=\angle A'$

我們要證明存在一個歐氏平面的保長變換（isometry）$i: E^2\to E^2$它把A，B，C分別映像到A'、B'、C'。

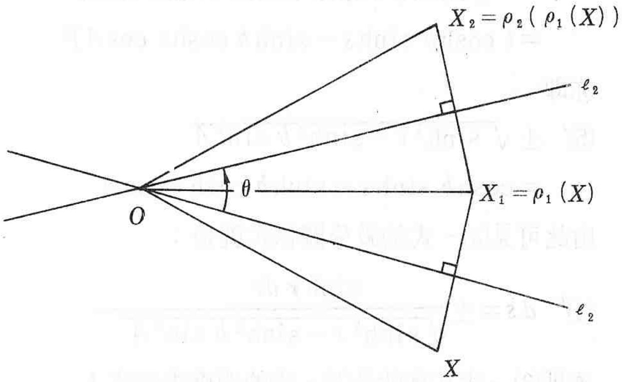


如上圖所示，令ℓ_1爲直線段$\overline{AA'}$的垂直平分線，ρ_1是平面對於ℓ_1的反射對稱，則ρ_1把ΔABC映像到$\Delta A'B_1C_1$的位置。若$B_1\neq B'$，則令ℓ_2爲$\angle B'A'B_1$的平分線，ρ_2是平面對於ℓ_2的反射對稱。它把$\overline{A'B_1}$映像到$\overline{A'B'}$。若$\rho_2(C_1)=C'$，則$\rho_2\cdot\rho_1$就是把ΔABC映像到$\Delta A'B'C'$的保長變換。不然，則ρ_2($\Delta A'B_1C_1$)和$\Delta A'B'C'$分屬於$\ell_3=A'B'$的兩側，而且它們是對於ℓ_3成反射對稱的，所以$i=\rho_3\cdot\rho_2\cdot\rho_1$即爲所求者。

【例2】：

設ℓ_1，ℓ_2是歐氏（或非歐）平面（或球面）上相交於O點的兩條直線（或大圓）；ρ_1、ρ_2分別是對於ℓ_1、ℓ_2的反射對稱，$\theta=\angle(\ell_1,\ell_2)$。則$\rho_2\cdot\rho_1$是一個以$O$點爲中心的$2\theta$-角度的旋轉。〔其幾何特徵是保持面上每點和$O$點的距離，把每條由$O$點出發的射線都旋轉了$2\theta$-角度的保長變換。〕

如下圖所示，設X是面上任給一點，令



$X_1=\rho_1(X)$，$X_2=\rho_2\circ\rho_1(X)=\rho_2(X_1)$。由反射對稱的幾何特性可見$\Delta OXX_1$和$\Delta OX_1X_2$都是等腰三角形；而且$\ell_1$，$\ell_2$分別是它們的頂角平分線。令

$$\alpha=\angle(\ell_1,OX_1),\ \beta=\angle(OX_1,\ell_2)$$

〔注意α，β是有正負轉向的可能性者！〕則有

$$\alpha+\beta=\theta=\angle(\ell_1,\ell_2)$$
$$\angle(OX,OX_1)=2\alpha,$$
$$\angle(OX_1,OX_2)=2\beta$$

所以 $\angle(OX,OX_2)=2\alpha+2\beta=2\theta$。

〔在上圖所示者，是α，β皆爲正的情形，請讀者自行作圖討論α、β爲正、負或負、正的情形。當然，在α、β皆負時θ也必然是負的，是不？〕

由此可見，歐氏、非歐平面和球面都是對於其中任何一點皆具有旋轉對稱性的，所以它們都是齊性的抽象旋轉面。再者，由上一節的研討顯示，它們的根本幾何結構在于其本質函數$g(r)$。再者，我們業已熟知的歐氏平面和半徑爲ρ的球面的本質函數，分別就是：

$$g(r)=r\ (\text{歐氏})\ \text{和}$$

$$g(r)=\rho\sin\left(\frac{r}{\rho}\right)\ (\text{球面})$$

所以我們首先得要解答的問題就是：

(i) **存在性問題**：除了上述歐氏平面和球面這兩種齊性抽象旋轉面之外，還有沒有其他的齊性抽象旋轉面？亦即舉出其他的本質函數$g(r)$，使得$M^2(g)$是齊性的。

(ii) **唯一性問題**：確定所有齊性抽象旋轉面的本質函數。

下述基本定理直截了當地解答了上述存在性和唯一性問題，也簡明扼要地解決了非歐平面的存在性和唯一性問題。

(二)存在性和唯一性定理：

定理 4：抽象旋轉面$M^2(g)$是齊性者的充要條件是它的高斯曲率$K=-\dfrac{g''(r)}{g(r)}$恒爲常數。再者，當$K\equiv 0$，$K\equiv C>0$和$K\equiv C<0$時，其本質函數$g(r)$分別爲

$$(1)\quad\begin{cases} K\equiv 0,\ g(r)=r\ (\text{歐氏}) \\ K\equiv C>0,\ g(r)=\dfrac{1}{\sqrt{C}}\sin\sqrt{C}\,r\quad(\text{球面}) \\ K\equiv C<0,\ g(r)=\dfrac{1}{\sqrt{-C}}\sinh\sqrt{-C}\,r\quad(\text{非歐}) \end{cases}$$

【證明】：

我們將先證唯一性，然後再驗證存在性。

(i) **唯一性**：設$M^2(g)$是任給的一個齊性抽象旋轉面，亦即對於任何兩點A，B都有一個適當的$M^2(g)$上的保長變換i使得$i(A)=B$。由定理 3 易見高斯曲率顯然是在保長變換之下保持不變的。因此齊性的$M^2(g)$上各點的高斯曲率當然必須相同，亦即$K=-\dfrac{g''(r)}{g(r)}=C$（是一個常數！），由微分方程

$$g''(r)+Cg(r)=0$$

和初值條件$g(0)=0$，$g'(0)=1$即得$g(r)$必須是：

$$(1)\quad\begin{cases} C=0,\ g(r)=r, \\ C>0,\ g(r)=\dfrac{1}{\sqrt{C}}\sin\sqrt{C}\,r, \\ C<0,\ g(r)=\dfrac{1}{\sqrt{-C}}\sinh\sqrt{-C}\,r。\end{cases}$$

(ii)存在性：在$C=0$和$C>0$的情形，$M^2(g)$就是熟知歐氏平面和半徑爲$\frac{1}{\sqrt{C}}$的球面，它們的齊性(homogeneity)是熟知能詳、一目瞭然的。所以在這裡我們所要驗證的要點是在$C<0$的情形，亦即在$g(r)=\frac{1}{\sqrt{-C}}\sinh\sqrt{-C}\,r$時，$M^2(g)$是眞的具有齊性的，因爲齊性在放大縮小之下是顯然保持的，所以我們可以把一般的$C<0$的情形歸於$C=-1$，亦即$g(r)=\sinh r$的情形加以驗證。我們所要論證的就是：在$g(r)=\sinh r$的特佳情形，抽象旋轉面$M^2(g)$其實是對於任何一個給定點都也是旋轉對稱的。

$M^2(g)$, $g=\sinh r$, 的齊性的證明：

(i)在$g(r)=\sinh r$這種特佳的情形，積分形式的餘弦公式

(2) $$s=\int_b^r \pm\frac{\sinh t\,dt}{\sqrt{\sinh^2 t-\sinh^2 b\sin^2 A}}$$

，$r=r(s)$。

其實是可以改用初等函數直接表達r和s之間的關係的，其答案爲

(3) $$\cosh r=\cosh b\cosh s-\sinh b\sinh s\cos A,$$

，$r=r(s)$。

我們可以反過來用微分驗算上述積分表達式，其計算如下：將(3)-式對於s求微分即有

(4) $$\sinh r\frac{dr}{ds}=\cosh b\sinh s-\sinh b\cosh s\cos A$$

再者，由(3)-式可以算得

$$\begin{aligned}&\sinh^2 r-\sinh^2 b\sin^2 A\\&=\cosh^2 r-\cosh^2 b+\sinh^2 b\cos^2 A\\&=(\cosh b\cosh s-\sinh b\sinh s\cos A)^2\\&\quad-\cosh^2 b+\sinh^2 b\cos^2 A\\&=\cosh^2 b\sinh^2 s+\sinh^2 b\cosh^2 s\cos^2 A\\&\quad-2\cosh b\sinh b\cosh s\sinh s\cos A\\&=(\cosh b\sinh s-\sinh b\cosh s\cos A)^2\end{aligned}$$

亦即

(5)′ $$\pm\sqrt{\sinh^2 r-\sinh^2 b\sin^2 A}=\cosh b\sinh s-\sinh b\cosh s\cos A$$

由此可見(3)-式的微分關係式就是：

(4)′ $$ds=\pm\frac{\sinh r\,dr}{\sqrt{\sinh^2 r-\sinh^2 b\sin^2 A}}$$

亦即(3)-式其實就是(2)-式的明確表達式！

(ii)由抽象旋轉面的定理2即有

(6) $$\sinh r\cdot\sin\alpha=\sinh b\cdot\sin A$$

其中 $$\sin\alpha=\sinh r\cdot\frac{d\theta}{ds}$$

由此可得

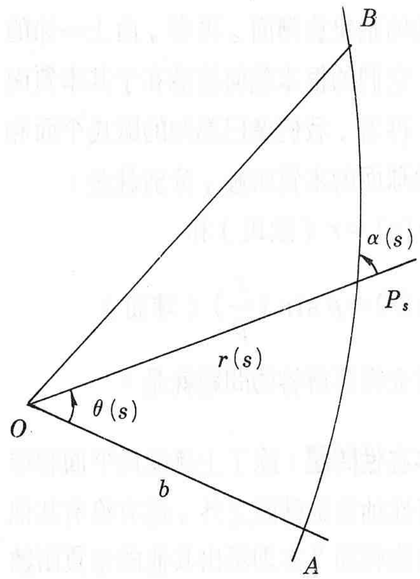
(7) $$\sinh^2 r\frac{d\theta}{ds}=\sinh r\sin\alpha=\sinh b\sin A$$

再用(3)-式即得

(7)′ $$\frac{d\theta}{ds}=\frac{\sinh b\sin A}{(\cosh^2 r-1)}=\frac{\sinh b\sin A}{(\cosh b\cosh s-\sinh b\sinh s\cos A)^2-1}$$

亦即

(8) $$\theta(s)=\int_0^s\frac{\sinh b\sin A\,dt}{(\cosh b\cosh t-\sinh b\sinh t\cos A)^2-1}$$



(8)-式求積分的答案是

(8)′ $\theta(s)=\arcsin\left\{\dfrac{\sin A\sinh s}{\sqrt{(\cosh b\cosh s-\sinh b\sinh s\cos A)^2-1}}\right\}$

亦即

(8)″ $\sin\theta(s)$

$$=\frac{\sin A\sinh s}{\sqrt{(\cosh b\cosh s-\sinh b\sinh s\cos A)^2-1}}$$

我們可以同樣地用微分(8)″一式來驗算上述結果，由(8)″式容易算得

(9) $\cos\theta$

$$=\frac{\sinh b\cosh s-\cosh b\sinh s\cos A}{\sqrt{(\cosh b\cosh s-\sinh b\sinh s\cos A)^2-1}}$$

將(8)″式對於 s 微分，即有

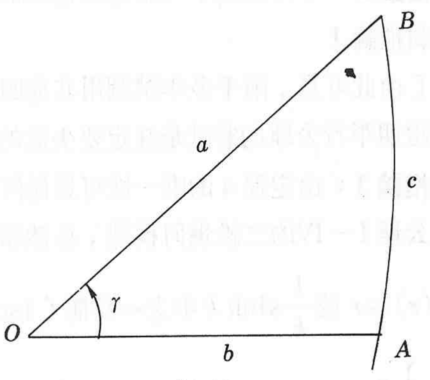
(10) $\cos\theta\cdot\dfrac{d\theta}{ds}=$

$$\frac{d}{ds}\left\{\frac{\sin A\sinh s}{\sqrt{(\cosh b\cosh s-\sinh b\sinh s\cos A)^2-1}}\right\}$$

$$=\frac{\sinh b\sin A\cdot(\sinh b\cosh s-\cosh b\sinh s\cos A)}{[(\cosh b\cosh s-\sinh b\sinh s\cos A)^2-1]^{\frac{3}{2}}}$$

由(9)、(10)式即得(7)′式。〔(10)-式是直截了當的求微分計算和代數整理，請讀者自行演算一遍。〕

(iii)總結(i)、(ii)這兩個積分計算所得的公式，對于 $M^2(g)$，$g=\sinh r$ 中的一般 ΔOAB（如下圖所示）即有下列三條角邊關係，



〔$a=r(c)$，$\gamma=\theta(c)$〕

$\cosh a=\cosh b\cosh c-\sinh b\sinh c\cosh A$,

(11) $\sin\gamma=\dfrac{\sin A\sinh c}{\sqrt{\cosh^2 a-1}}=\dfrac{\sin A\sinh c}{\sinh a}$,

和原先已有的 $\dfrac{\sin A}{\sinh a}=\dfrac{\sin B}{\sinh b}$

由(11)-式即可得出

$$\frac{1-(\cosh^2 a+\cosh^2 b+\cosh^2 c)-2\cosh a\cosh b\cosh c}{\sinh^2 a\sinh^2 b\sinh^2 c}$$

$$=\frac{\sin^2 A}{\sinh^2 a}\ \left(=\frac{\sin^2 B}{\sinh^2 b}=\frac{\sin^2\gamma}{\sinh^2 c}\right)$$

由此即可（反過來）推導而得

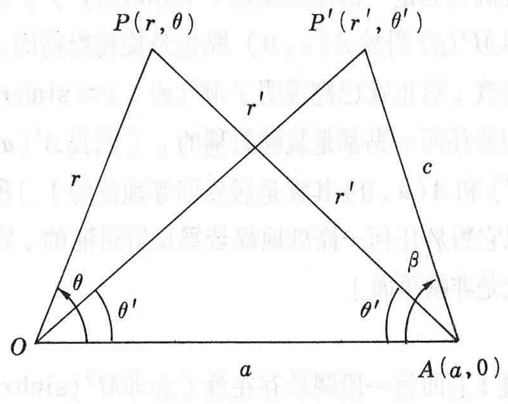
$$(12)'\begin{cases}\cos^2 B=\dfrac{(\cosh a\cosh c-\cosh b)^2}{\sinh^2 a\sinh^2 c}\\ \text{和 }\cos^2\gamma=\dfrac{(\cosh a\cosh b-\cosh c)^2}{\sinh^2 a\sinh^2 b}\end{cases}$$

亦即

$$(12)''\begin{cases}\cosh b=\cosh a\cosh c\\ \qquad-\sinh a\sinh c\cos B,\\ \cosh c=\cosh a\cosh b\\ \qquad-\sinh a\sinh b\cos\gamma。\end{cases}$$

由此可見，ΔOAB 具有完全而且對稱的全套正、餘弦公式。

(iv)有了上述 ΔOAB 的完備的三角公式，就不難進而證明 $M^2(\sinh r)$ 的齊性。讓我們來研討下述兩個三角形 ΔOAP 和 $\Delta OAP'$。如下圖所示，



A，P的極座標分別是$(a,0)$和(r,θ)。令r'爲$\overline{AP}$的長度，θ'是$\angle OAP$的角度，取P'點是以上述(r',θ')爲極座標者，令c爲$\overline{AP'}$的長度，β爲$\angle OAP'$的角度，則有ΔOAP和$\Delta OAP'$的角邊關係式。

$$(13)\quad\begin{cases} \dfrac{\sin\theta'}{\sinh r}=\dfrac{\sin\theta}{\sinh r'}=\dfrac{\sin P}{\sinh a} \\ \cosh r=\cosh a \operatorname{coh} r' \\ \qquad -\sinh a\ \sinh r'\ \cos\theta' \\ \cosh r'=\cosh a\ \cosh r \\ \qquad -\sinh a\ \sinh r\cos\theta \\ \cosh a=\cosh r\ \cosh r' \\ \qquad -\sinh r\ \sinh r'\ \cos P \end{cases}$$

$$(13)'\quad\begin{cases} \dfrac{\sin\theta'}{\sinh c}=\dfrac{\sin\beta}{\sinh r'}=\dfrac{\sin P'}{\sinh a} \\ \cosh c=\cosh a\ \cosh r' \\ \qquad -\sinh a\ \sinh r'\ \cos\theta' \\ \cosh r'=\cosh a\ \cosh c \\ \qquad -\sinh a\ \sinh c\ \cos\beta \\ \cosh a=\cosh s\ \cosh r' \\ \qquad -\sinh c\ \sinh r'\ \cos P' \end{cases}$$

由此易見$c=r$，$\beta=\theta$，$\angle P'=\angle P$。〔因爲c，β，$\angle P'$的値業已由a，r'，θ'和(13)′式所唯一確定，而(13)式則說明$c=r$，$\beta=\theta$，$\angle P'=\angle P$是滿足(13)′-式的！〕

令$i: M^2(g)\to M^2(g)$就是把上述$P(r,\theta)$點映射到$P'(r',\theta')$點的變換（亦即以(13)-式爲其變換表達式者），則上述結果也就已經說明它是一個保長變換（isometry）！所以$M^2(g)$對於$A(a,0)$點也是旋轉對稱的。其實，這也就已經證明了$M^2(g)$，$g=\sinh r$，對於任何一點都是旋轉對稱的。〔因爲$A'(a,\theta)$和$A(a,0)$其實是居於同等地位的！〕所以它對於任何一條測地線皆爲反射對稱的，它就是非歐平面！

註：上面這一段關於存在性（亦即$M^2(\sinh r)$的齊性)的證明,關鍵在於利用$g(r)=\sinh r$的特殊性，用積分計算把原來對於ΔOAB的廣義正、餘弦定律加以明確化，而且擴充成完全的全套正、餘弦公式，其實是一種既初等而且幾何思路十分明朗的證法，往後我們還要提供用到一些變換群基本知識的另外證明法。

推論 1：$M^2(g)$，$g=\dfrac{1}{k}\sinh kr$，$k>0$，滿足歐氏幾何公理體系中的 I－IV，但是其三角形內角和恒小於一平角。（亦即平行公理是不成立的！）

【證明】：

過原點O和其他任給一點$P(r_0,\theta_0)$，$r_0\neq 0$，顯然有而且僅有一條測地線，亦即經線$\theta\equiv\theta_0$，再由它業已得證的齊性可見過任給相異兩點A、P，皆有而且僅有一條「直線」，亦即相異兩點定一直線。

再者，過原點O的任給一條直線，亦即$\theta\equiv\theta_0$或$\pi+\theta_0$。顯然把$M^2(g)$分割成兩個連通區，而且$M^2(g)$對於它是成反射對稱的。再由$M^2(g)$的齊性可見上述性質是對於$M^2(g)$中任給一條直線ℓ皆成立的。由此容易逐一驗證它是滿足歐氏平面除了平行公理之外的其他四組公理的。

但是由定理 3 和$K=-\dfrac{g''}{g}=-1$，$g(r)=\sinh r$，在$M^2(g)$中的三角形內角和恒小於一平角，而且其虧額等於三角形的面積。由此可見，$M^2(g)$和歐氏平面在公理 I－IV方面完全相同，但是在平行公理上迥異！

推論 2：平行公理不可能是其他四組公理的邏輯推論！

〔由此可見，兩千多年試圖用其他四組公理來證明平行公理的嘗試是註定要失敗的！〕

推論 3：由定理 4 的唯一性可見任何一個滿足公理 I－IV的二維幾何模型，必然和$M^2(g)$，$g(r)=r$或$\dfrac{1}{k}\sinh k$中之一同構（isometric）。

推論 4：設 α 是一個在歐氏平面中成立但是在非歐平面中不成立的性質，則有

$$\alpha \text{ 和公理 I}-\text{IV} \Longleftrightarrow \text{公理 I}-\text{V}$$

邏輯等價。

【證】：

由推論 3 和上述對於性質 α 的假設，歐氏平面是唯一具有「α 和公理 I－IV」的幾何模型。換句話說，「α 和公理 I－IV」業已構成歐氏平面的一組特徵性質，亦即公理體系。

推論 6：在 $M^2(\sinh r)$ 中的任給三角形 ΔABC，皆滿足下述（非歐）正、餘弦定律，即

$$\frac{\sin A}{\sinh a}=\frac{\sin B}{\sinh b}=\frac{\sin C}{\sinh c} \quad \text{（正弦定律）}$$

$$\begin{cases} \cosh a=\cosh b\cosh c-\sinh b\sinh c\cos A \\ \cosh b=\cosh a\cosh c-\sinh a\sinh c\cos B \\ \cosh c=\cosh a\cosh b-\sinh a\sinh b\cos C \end{cases} \quad \text{（餘弦定律）}$$

推論 5：歐氏平面和非歐平面所共有的性質也就是 Bolyai 所謂絕對幾何學中的定理，理論上它們都是公理 I－IV 的邏輯推論。

㈢非歐平面的幾何與三角：

非歐平面的特徵性質是公理 I－IV 和三角形內角和恒小於一平角，由定理 4 得知它們也就是 $M^2(g)$，$g(r)=\frac{1}{k}\sinh kr$，所以在適當選取長度單位（或者說適當地加以放大或縮小）之後，都是和 $M^2(\sinh r)$ 保長同構者（一如在球面幾何的討論中可以把球半徑取爲長度的單位），本段將把所討論的非歐平面取定爲 $M^2(\sinh r)$ 這個正規化模型（normalized model）。

⑴三角形內角和的虧額（defect）等於其面積，亦即

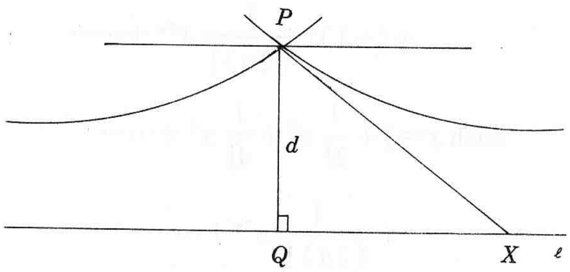
$$\Delta ABC \text{ 的面積}=\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)。$$

⑵三角形的面積恒小於 π。

⑶多邊形的外角和恒大於一週角，而且其盈額等于其面積。

〔上述非歐平面的高斯曲率 $K=-\frac{g''}{g}\equiv 1$，所以上面三點都是定理 3 的特殊情形。〕

⑷如下圖所示，過直線 ℓ 的線外一點 P，有無窮多條和 ℓ 不相交的直線，其中有兩條相交線和不交線的分界者，稱之謂過 P 點對於 ℓ 的左、右平行線。它們也就是直線 PX 當 X 在 ℓ 上分別向左、右無限遠遁的極限位置。設 PQ 是由 P 點引向 ℓ 的垂線，則左、右平行線顯然和 PQ 成反射對稱，它們和 PQ 之間的夾角是一個隨着 P 點到 ℓ 的距離而定者。我們將在下面確定兩者之間的函數關係。



⑸上一段的推論 6 業已列舉一個任給非歐三角形 ΔABC 的角邊函數關係，亦即非歐三角的正、餘弦定律。由這樣一組基本關係當然很容易推得非歐幾何學中三角形的疊合條件，其中和球面幾何相同但是和歐氏幾何不同者是三內角對應相等業已構成疊合條件。

⑹非歐三角的正、餘弦定律和第一節所說的球面三角正、餘弦定律十分相像、相通。因此有必要徹底比較分析一下兩者之間的共性和相互溝通的渠道何在。

【分析】：

（i）（單位）球面和非歐平面的本質函數分別是 $\sin r$ 和 $\sinh r$。所以歸根究底得先抓住 $\sin r$ 和 $\sinh r$ 這兩個解析函數之間相互溝通的渠道。從它們的冪級數展開式來看，即

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

$$\sinh x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots\cdots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots\cdots$$

不難看到兩者具有（複變）函數關係式：

$\sinh(ix) = i\sin x$，

$\sin ix = i\sinh x$

再者，分別在球面和非歐三角的餘弦定律中扮演要角的 cos 和 cosh 的冪級數展開式分別如下，即

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\cdots$$

$$\cosh x = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots\cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\cdots$$

所以它們之間也有相像的（複變）函數溝通關係，即

$\cosh ix = \cos x$，$\cos ix = \cosh x$

(ii)用上述函數關係來比較分析球面和非歐三角定律，就不難看出下述相互溝通的「渠道」，即

將球面三角公式中的邊長都多加一個 i 因子，所得的解析關係式就是相應的非歐三角公式，反之亦然，例如

$$\frac{\sin A}{\sin(ia)} = \frac{\sin B}{\sin(ib)} = \frac{\sin C}{\sin(ic)}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sin A}{\sinh a} = \frac{\sin B}{\sinh b} = \frac{\sin C}{\sinh c}$$

$$\cos(ia) = \cos(ib)\cos(ic) + \sin(ib)\sin(ic)\cos A$$

$$\begin{aligned}\Longleftrightarrow \cosh a &= \cosh b\cosh c + i^2 \cdot \sinh b\sinh c\cos A\\ &= \cosh b\cosh c - \sinh b\sinh c\cos A\end{aligned}$$

由此可見，我們在第一節對於球面三角的大部份代數或解析的推導，都可以直接運用上述渠道，引用到非歐三角來求得相對應的結論。再者，在第二節(三)的引子中，我們曾提及十八世紀的 Johann Heinrich Lambert 當年曾經感嘆地說：「平行公理不成立的那種幾何應該可以發生在半徑是虛數的球面上！」上面這種互相溝通的渠道，也可以說把他當年的感嘆，加以明確的註解！

【例1】：非歐三角的半角公式

將第一節球面三角半角公式的推得過程中涉及邊長的一律加上一個 i - 因子，即得非歐三角的半角公式的推導式，即

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sinh(s-a)\sinh s}{\sinh b \cdot \sin c}}$$

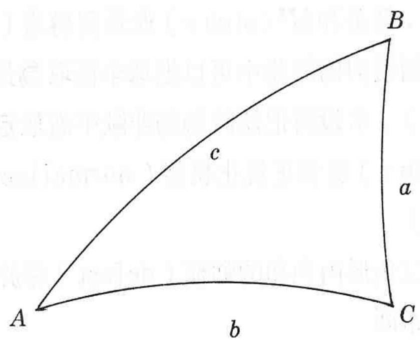
$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sinh(s-b)\sinh(s-c)}{\sinh b\ \sinh c}}$$

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sinh(s-b)\sinh(s-c)}{\sinh s\ \sinh(s-a)}}$$

〔分子、分母所含的 i - 因子相等，所以相消。〕

【例2】：

設非歐三角形 ΔABC，$\angle C = \frac{\pi}{2}$，則有



$\sinh a = \sinh c \ \sin A$

$\sinh b = \sinh c \ \sin B \ (\sin C = 1)$

$\cosh c = \cosh a \ \cosh b \ (\cos C = 0)$

$\sinh c \sinh b \cos A = \cosh b \cosh c - \cosh a$

$\sinh c \sinh a \cos B = \cosh a \cosh c - \cosh b$

由此可得

$$\tan A = \frac{\sinh b \ \sinh c \ \sin A}{\sinh b \ \sinh c \ \cos A}$$

$$= \frac{\sinh b \ \sinh a}{\cosh b \ \cosh c - \cosh a}$$

$$= \frac{\sinh a \ \sinh b}{(\cosh^2 b - 1) \cosh a} = \frac{\tanh a}{\sinh b}$$

【例3】：

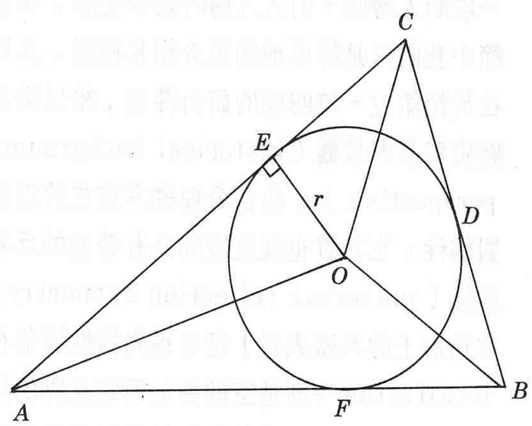
非歐三角形 ΔABC 的三內角平分線共交于一點O，它也就是內切圓的圓心，亦即O點到三邊的距離相等，它就是內切圓的半徑，如下圖所示。設E, F, D分別是三邊上的切點，則有

$$\overline{AE} = \overline{AF} = s - a$$

$$\overline{BD} = \overline{BF} = s - b$$

$$\overline{CD} = \overline{CE} = s - c$$

令r爲內切圓半徑，則有



$$\tanh r = \sinh (s-a) \tan \frac{A}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{\sinh(s-a) \sinh(s-b) \sinh(s-c)}{\sinh s}}$$

【例4】：

非歐三角中的角邊關係，還可以類似于球面三角的對偶公式，將半角公式改成下述比較勻稱的形式。爲此，我們改用A', B', C'表示ΔABC的外角，S'表示$\frac{1}{2}(A'+B'+C')$。先將非歐三角的半角公式改用外角表達，即有

$$\sin \frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{\sinh (s-a) \sinh s}{\sinh b \ \sinh c}},$$

$\sin \frac{B'}{2}$ ，$\sin \frac{C'}{2}$同此

$$\cos \frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{\sinh (s-b) \sinh (s-c)}{\sinh b \ \sinh c}},$$

$\cos \frac{B'}{2}$ ，$\cos \frac{C'}{2}$ 同此

$$\tan \frac{A'}{2} = \sqrt{\frac{\sinh s \ \sinh (s-a)}{\sinh (s-b) \sinh (s-c)}},$$

$\tan \frac{B'}{2}$ ，$\tan \frac{C'}{2}$ 同此

將上述半角公式組合可得

$$\begin{cases} \sinh (s-a) \cos \frac{A'}{2} = \sinh a \cos \frac{B'}{2} \cos \frac{C'}{2} \\ \sinh s \cdot \cos \frac{A'}{2} = \sinh a \sin \frac{B'}{2} \sin \frac{C'}{2} \\ \sinh (s-b) \sin \frac{A'}{2} = \sinh a \sin \frac{B'}{2} \cos \frac{C'}{2} \\ \sinh (s-c) \sin \frac{A'}{2} = \sinh a \cos \frac{B'}{2} \sin \frac{C'}{2} \end{cases}$$

以及它們的輪換對稱形式，再用加減組合和差化積公式，即可得出

$$\begin{cases} \cosh \frac{b+c}{2} \cos \frac{A'}{2} - \cos \frac{B'+C'}{2} \cosh \frac{a}{2} = 0 \\ \sinh \frac{b+c}{2} \cos \frac{A'}{2} - \cos \frac{B'-C'}{2} \sinh \frac{a}{2} = 0 \\ \cosh \frac{b-c}{2} \sin \frac{A'}{2} - \sin \frac{B'+C'}{2} \cosh \frac{a}{2} = 0 \\ \sinh \frac{b-c}{2} \sin \frac{A'}{2} - \sin \frac{B'-C'}{2} \sinh \frac{a}{2} = 0 \end{cases}$$

以及它們的輪換對稱形式。

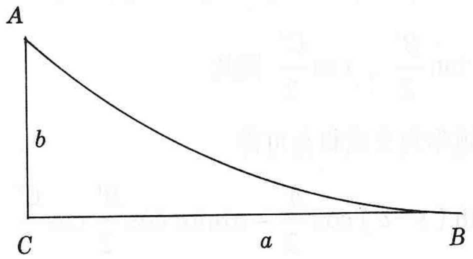
【註】:

由上面這樣一組公式就不難求得用外角表達 $\cosh\frac{a}{2}$，$\sin\frac{a}{2}$；$\cosh\frac{b}{2}$，$\sin\frac{b}{2}$；$\cosh\frac{c}{2}$，$\sinh\frac{c}{2}$ 的「半邊公式」。由此可見三角對應相等乃是非歐幾何中的一個疊合條件。

【習題】:

(1)試求非歐三角中用角表達半邊的 cosh，sinh 和 tanh 的半邊公式。

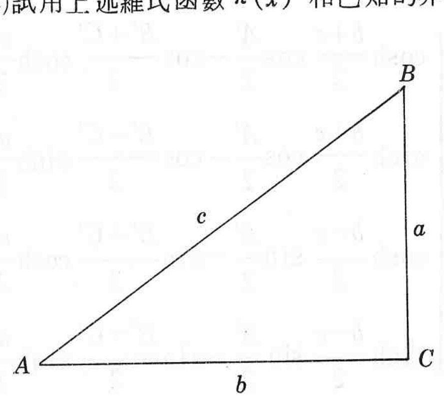
(2)設 ΔABC 是一個直角非歐三角形，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，試求把 b 取定，令 $a\to\infty$，角 A 的極限值。



〔上述極限值也就是當年Lobachevsky所研討的 $\pi(b)$，可用半角公式（$\tan\frac{A}{2}$）或例 2 的 $\tan A$ 公式。〕

(3)試證上述極限值 $\pi(b)$ 滿足 $\tan\frac{\pi(b)}{2}=e^{-b}$。

(4)試用上述羅氏函數 $\pi(x)$ 和已知的非歐三角公式驗證當年羅氏所得的直角 ΔABC 的角邊關係式，亦即



$$\begin{cases}\cot\pi(a)=\cot\pi(c)\cdot\sin A\\ \sin A=\cos B\ \sin\pi(b)\\ \sin\pi(c)=\sin\pi(a)\ \sin\pi(b)\end{cases}$$

(四)結語：

本章所研討的主題是空間的疊合公理與平行公理的本質蘊含，因為它們都充分體現在三角形這個既精且簡的幾何事物之上，所以三角形乃是本章理所當然的主角，而三角形的疊合性質、內角和，以至於描述其角邊關聯的正、餘弦定律則自然就是研究的核心問題，是所要研討的焦點和突破點之所在！

回顧本章這樣一段探討的歷程，第一節對於歐氏三角球面三角的討論，乃是下一番溫故知新的功夫，把歐氏和球面中三角形的幾何先有一個透徹的瞭解。平行公設的眞諦何在？這個讓世世代代幾何學家勞神苦思鑽研了兩千多年的基本問題，最後以非歐幾何學的發現而豁然開朗，導致人類思想的重大解放，這實在是一段耐人尋味、引人入勝的數學史話。在第二節中我們只是擇要地簡單介紹其梗概，其目的在於把第三、第四節的研討課題，給以適當的歷史背景與景觀（historical background & perspective）。疊合公理的本質在於空間的對稱性，它其實也就是空間具有普遍的反射對稱性（universal reflection symmetry）在三角形上的具體表現！把這種對稱性局部化（localization）則是空間對於取定基點的旋轉對稱性。第三節對於抽象旋轉面的解析研討，其實也就是上述局部化的對稱性的解析幾何；其基礎理論在於測地線方程、測地曲率和高斯伯內公式。所用到的只是初等的微分、積分計算，而所得到的則是廣義正、餘弦定理和高斯、伯內公式；它們透徹地揭示了對稱性和三角

形的幾何之間深刻的關聯。由此可見，第三節所採取的方案是對於局部化對稱性和三角形的角邊關係，兩者之間的內在關聯作深入的解析研討；是恰當自然的一種統一性推廣，是 J. Bolyai 當年求同存異地研討絕對幾何學的進一步發展。最後，在第四節中，我們再把局部化的對稱性是否能夠全局化的條件加以澄清，證明了齊性抽象旋轉面的唯一性和存在性定理。這其實已經是水到渠成的一次按圖索驥，順理成章的一個自然總結。然而究其所得，則不但圓滿地解答了非歐幾何的存在性和唯一性，平行公設的獨立性和它與所有一個並非和非歐幾何共有的性質之間的邏輯等價性，(參看推論 4) 而且也建立了非歐幾何的三角學與解析幾何基礎。

下面讓我們再用幾點補充性的按語作爲本章之結語：

㈠在本章的研討中，我們基本上只討論二維的情形，其理由有二：其一是我們所要研討的主題的精要完全集中在二維。只要解決好二維的情形，高維的情形則是直接明顯的加多維數而已，不再有任何困難和新現象。其二是二維的符號簡單，直觀一目瞭然，由此可見研討二維既可得簡明樸素之便利又能得扼其精要突出重點的好處。因此，對於高維的情形我們只在這裡補充一段按語說明其具體做法：

(i) 抽象旋轉面的高維推廣是一個具有局部化 $O(n)$ - 對稱性的黎曼空間，亦即黎曼空間 M^n 中具有一個基點 O，其定點保長變換群 $ISO(O, M^n) \cong O(n)$ 這種 n - 維黎曼空間在 $O(n)$ 的作用之下分割成一層層由 $O(n)$ - 軌道組成的同心 $(n-1)$ - 維球面。因此也有一個決定一切的本質函數 $g(r)$，紀錄着和 O 點距離是 r 的那個同心球面究竟是和多大半徑的 $(n-1)$ - 維球面保長同構，這也就是 $M^n(g)$。

(ii) 上述 $M^n(g)$ 中的 ΔOAB 具有和 $M^2(g)$ 完全同樣的廣義正、餘弦定理。

(iii) $M^n(g)$ 是齊性的充要條件依然就是 $-\dfrac{g''}{g}$ 恒等於常數，亦即

$$g(r) = \begin{cases} r \\ \dfrac{1}{\sqrt{c}} \sin \sqrt{c}\, r \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}} \sinh \sqrt{-c}\, r \end{cases}$$

其相應的齊性 $O(n)$ - 空間 $M^n(g)$ 就是 n - 維歐氏、球或非歐空間。

㈡誠然，上面這樣一大段探討加深了我們的認識，拓展了我們的視野，也許有些讀者心中還有幾個想一問究竟的疑問，例如：

(i) 歐氏空間既然如此簡便好用，我們又何必再去苦苦他求呢？

(ii) 非歐幾何模型的發現對於平行公理的理解，對於人類思想的解放都有重大、深遠的意義。但是除了這些純爲理論性的意義之外是否還有其他的重要應用呢？

上面這兩個問題並非故作異議，其實求知與致用是值得討論的話題，但是此事說來話長，亦非本章的正題，所以在此只想簡約地提幾點。

⑴二維非歐平面的幾何在單複變函數論、曲面的微分幾何中扮演重要的角色。

⑵三維非歐空間的幾何在近來的三維拓樸的研究中具有根本的重要性。(Thurston 的三維拓樸理論)

⑶像歐氏空間、球空間和非歐空間可以說是天地之間至精至美的幾何模型，是天生瑰寶它們自然蘊育着無窮妙用。假若不下功夫精益求精地把它的妙處瞭解得精深簡樸兼而有之，又何能將其妙用發揮得琳璃盡致呢？由此可見，求知不忘致用是對的，但是不必也無法斤斤計較於致用才去求知，是不？可以說求知和致用是相輔相成的兩個方向，各有各的獨立性、重要性的風格。其實，眞知自然會有妙用，實踐致用也必然會引發新知。