評王九逵、柯慧美著「集合論」

康明昌

書　名：集合論
著　者：王九逵　柯慧美
發行者：數學家股份有限公司
　　　　台北郵政信箱96-202
　　　　郵政劃撥帳戶14821058
定　價：新台幣壹佰元
時　間：1991年1月初版

(一)

在我當學生的時候，我們就知道王九逵先生有一本集合論的講義。誠如本書序言說的：

「這份講義的初稿是三十年前九逵在台灣大學講授集合論時由班上的同學江清源、蔡卓民、劉容生、藍光國及華洋諸先生整理筆記，再由九逵訂正而成的。以數學系二年級學生為主要對象。

直到十三年前，慧美使用這份講義在清華大學授課，才又拿了出來。此後慧美用這講義在清華大學和中央大學教了好幾次。」

我誠摯的歡迎王先生與柯先生這份講義正式問世，可以服務更多的讀者。我很樂意把它推荐給學習數學和喜歡數學的朋友。

(二)

集合論是德國數學家Georg Cantor(1845～1918)創建的。

Cantor 生於俄國聖彼得堡，他的父親是個成功的商人。十一歲時，他們全家移居到德國法蘭克福。1862年他到瑞士蘇黎世大學就讀，次年轉到柏林大學。1867年獲得博士學位，他的博士論文跟數論有關，指導教授是E.E. Kummer(1810～1893)與L. Kronecker(1823～1891)。1869年他到Halle大學任教，1879年升教授。Cantor一直很希望能在當時德國最負盛譽的兩所大學(柏林大學與哥廷根大學)當教授。他認爲他有足夠的資格到那裏。可惜他的集合論不合Kronecker的口味，德國的數學界也沒有及時認識他的學術貢獻。從1884年第一次精神崩潰，他就罹患深度的抑鬱症，成爲療養院的常客，1918年死於Halle大學的精神療養院。

Cantor 到Halle大學不久，結識一個資深的同事E. Heine(1821～1881)，從此改變了他的一生，也替數學研究開創了一個新天地。Heine這時正研究**傅里葉級數的唯一性問**

題。這個問題這樣說：設 $f(x)$ 是一個傅里葉級數

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\ ;$$

如果對於大部分的 x 值，$f(x)$ 均爲零，那麼

(1) $a_0=0$ ，$a_n=b_n=0$

是否恆成立？

這個問題很快的吸引 Cantor 的注意。最初，他證明：如果除了有限多個 x 值之外，$f(x)$ 都爲零，那麼(1)式的確會成立。可是，他接著發現：即使把這有限多個尙未確知的 x 值變成無窮多個，(1)式仍然有可能成立，不過這無窮多個數分佈的狀況卻與(1)式成立與否大有關係。

Cantor 爲了證明這個定理，他必須確實掌握實數系的性質。他對於過去的人只是把無理數看成有理數的極限的方式極不滿意，他要**用精確的方法從有理數造出實數系**。Cantor 建造實數系的方法是利用基本序列（fundamental sequence，又稱 Cauchy sequence），這是現在許多高等微積分課本採用的方法。利用這個方法，很容易證明：對於數線上任意一點，必有一個實數與其對應。可是，對於任意實數，是否恆有一點與其對應呢？這可不是容易的事。Cantor 甘脆假定它是對的，這就是有名的**實數系的 Cantor 公設**：數線上的點與實數恰好成一對一的對應。

Cantor 接著探討實數線上無窮多個點各種不同的分佈情形。他引入現在點集拓樸學中極限點（limit point）的概念。若 P 是實數系的子集，$P^{(1)}$ 代表 P 的所有極限點形成的集合，……，$P^{(n)}:=(P^{(n-1)})^{(1)}$ 代表集合 $P^{(n-1)}$ 的所有極限點形成的集合。如果存在正整數 n 使得 $P^{(n)}=\phi$，則 P 稱爲第一類集合；否則，P 稱爲第二類集合。Cantor 的定理是：如果尙未確知的 x 值形成第一類集合，則(1)式仍然成立。

在考慮集合 P 的極限點時，Cantor 除了考慮 $P^{(n)}$ 之外（$n=1,2,3,4,\ldots\ldots$），他還定義

$$P^{(\omega)}=\bigcap_{n=1}^{\infty}P^{(n)},$$

$$P^{(\omega+1)}=(P^{(\omega)})^{(1)},\ P^{(\omega+2)}=(P^{(\omega+1)})^{(1)},\cdots,$$

$$P^{(\omega 2)}=\bigcap_{n=1}^{\infty}P^{(\omega+n)}$$

這些 $1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\omega+2,\cdots,\omega_2,\cdots$ 不是素樸的序數嗎？

既然對於實數的無窮子集開始感覺興趣，Cantor 很自然地就碰到這個問題：有理數形成的集合與實數系究竟有何不同？

可數集與不可數集 1872 年 Cantor 在瑞士第一次遇到 R. Dedekind（1831～1916）。1873 年 11 月 29 日，Cantor 寫給 Dedekind 一封信。Cantor 知道，有理數和正整數有一個一對一的對應；但是，他懷疑實數和正整數之間不可能有一對一的對應。不過他不知道如何證明。幾天以後（12 月 2 日），他再寫一封信告訴 Dedekind，他從未認眞研究這個問題，因爲它似乎毫無價值。五天以後，他又寫一封信給 Dedekind，他已經可以證明：實數與正整數之間不可能存在一對一的對應，也就是說，實數是不可數的（uncountable）。（請參考王九逵與柯慧美「集合論」第 24 頁，以下簡稱「集合論」。）

Cantor 同時注意到：因爲代數數形成的集合是可數的，而實數卻不可數，因此存在無窮多個超越數（請參考「集合論」第 25 頁）。這個有關超越數的存在定理是法國數學家 J. Liouville（1809～1882）在 1844 年用代數數的逼近定理證明的，現在 Cantor 居然用抽象的方法給出新的證明！

平面與直線的一對一對應 早在 1874 年 Cantor 就開始研究平面的點與直線的點會不會存在一個一對一的對應。他的朋友都懷疑這是一個愚蠢的問題，因爲直線是一維的，平面

是二維的。直到1877年6月20日，Cantor 給Dedekind 的信才宣布答案：平面與直線之間的確存在一個一對一的對應。Cantor 說：「我發現它，可是我簡直不敢相信！(“Je le vois，mais je ne le crois pas.”)」

這個定理對於現在的學生並不困難(請參考「集合論」題65，第37頁)，Cantor 卻足足花了三年多的時間才想出來。Cantor 原始的方法雖然有些瑕疵，卻相當有意思。我們不妨考慮如何建立〔0，1〕與〔0，1〕×〔0，1〕之間的一對一對應。首先，由於有限小數可以有兩種表示法：

$$0.3=0.29999\cdots\cdots,$$

我們把所有的不爲零的小數都取爲無限小數。Cantor 把0.123456789………對應到

$$(0.13579\cdots\cdots,\ 0.2468\cdots\cdots),$$

他把(0.1728402……，0.2600798……)對應到

$$0.12762080470928\cdots\cdots\ 。$$

這不就是〔0，1〕與〔0，1〕×〔0，1〕之間的一對一對應嗎？

Dedekind 很快就發現，這種對應其實是不連續的。Dedekind 認爲，空間中連續的一對一對應應該保持維數的。Cantor 想證明這件事，卻沒有成功；它的證明有賴荷蘭的數學家L. E. J. Brouwer(1881～1966)來完成，Brouwer 在1910年才證明這個拓樸學上有名的定理。

Cantor 這些研究成果並沒有給他帶來好運，因爲他的老師Kronecker一向對於這類Weierstrass式的數學深惡痛絕。在Kronecker 眼中，這些論文簡直是垃圾。

基數與序數　Cantor 在集合論最重要的論文是1879～1884發表在「數學年刊(Mathematische Annalen)」的六篇論文。這幾篇論文討論基數與序數，及其各種運算(請參考「集合論」第26～28頁，第36～39頁，第54～57頁，第60～61頁)。可以說，這幾篇論文奠定了集合論的理論基礎。

傳統的微積分只是把無限大當做一種性質，一種符號，它並不是眞正的數。現在Cantor打破傳統的看法，他把無限大看成眞正的數；並且不但有一個無限大的數，甚至有許許多多的無限大的數，它們之間還可以做加法、乘法與乘冪。

這些無限大的數就是基數與序數。簡單的說，兩個集合之間如果存在一個一對一的對應，它們就具有同樣的基數；同樣的，互相相似的良序集合具有同樣的序數。

Cantor 顯然非常瞭解這幾篇論文的重要性。在1883年的論文即將刊登時，他幾乎每天寫一封信給雜誌的編輯，催他快點把這一期的雜誌印出來。可惜，數學界需要更多的時間才能認識Cantor 的偉大；在1897年的論文發表之後，集合論的概念才被當時不少第一流數學家所肯定，當然還有不少人不願接受這些概念。

連續統假說　有了基數的概念之後；每個人自然都會問：既然正整數形成第一個無窮大基數的集合，那麼第二個無窮大基數的集合是不是實數系？更一般的，若m是一個無窮大基數，那麼在m與2^m之間是不是不會再有其他基數？(請參考「集合論」第41頁。)

因爲哲學家一向把數線稱爲連續統，所以Cantor 把這個和實數系有關的性質稱爲連續統假說。爲了證明這個假說，Cantor 幾乎耗盡心神，這也是他在1884年精神崩潰的原因之一。可是，Cantor 還是不能證明連續統假說，它的解決有待1939年K. Gödel 與1963年P. Cohen 的努力。

Cantor 爲了研究連續統假說，他開始探討數線的性質。用現在點集拓樸學的術語來說，Cantor 發現數線是完善集(perfect set)。但是完善集並不能夠完全界定數線，Cantor 舉個例子，Cantor集是完善集，但是它一點兒也不稠密，並且它的測度是零(請參考「集合論」第25頁)。因此Cantor認爲應該

加入「連通(connectedness)」的條件。許多點集拓樸的概念就在這種情況下引進來。

良序原理 Cantor在1895年那篇論文還考慮一個問題。設m與n是二基數，若$m\leqslant n$且$n\leqslant m$，那麼m與n是否相等？Cantor自己不能證明m與n相等，它是E. Schröder與Felix Bernstein獨立證明出來的，Bernstein是Cantor在Halle大學的學生，後來跟D. Hilbert做博士論文。(請參考「集合論」第33頁。)

爲了證明Cantor-Bernstein-Schröder定理，Cantor提出另一個他不能證明的定理，基數的三一律：對於任意的基數m與n，$m=n$，$m>n$或$m<n$，這三者必有一個成立並且僅有一個成立。

顯然，基數的三一律可以得出Cantor-Bernstein-Schröder定理。但是怎麼證明這個定理呢？Cantor又再提出一個他不能證明的定理，良序原理：任一集合都可引入一種全序使其成爲良序集合(請參考「集合論」第58頁)。

Cantor利用良序原理導出基數的三一律。事實上，直到二十年後F. Hartogs(1874～1933)才發現也可以由基數的三一律導出良序原理。

不管如何，Cantor還是留下一個良序原理沒有證明。良序原理是E. Zermelo(1871～1953)在1905年證明的。Zermelo在證明良序原理時利用一個性質，選擇公理：設$\{A_i: i\in I\}$爲一集合族，且每個A_i都不是空集。則存在一個函數$f: I\rightarrow\bigcup_{i\in I}A_i$使得$f(i)\in A_i$(請參考「集合論」第20頁)。

對於有限個非空的集合$A_1, A_2, \cdots, A_n$，利用數學歸納法，我們很容易在每個集合隨意挑出一個元素。但是，如果$\{A_i: i\in I\}$是一個無窮多的集合族，並且沒有明確的說出挑選元素的方法，許多傳統的數學家不太相信這樣可以在每個集合隨意挑出一個元素。請注意，這時候數學歸納法不管用了，我們必須容忍某種「跳躍式」的論證。

事實上，選擇公理，良序原理，Zorn引理，基數的三一律，都是等價的(請參考「集合論」第69頁)。在Zermelo-Fraenkel的公理體系中，廣義的連續統假說蘊含選擇公理。

對角線法 現在許多學生都會運用對角線法(請參考「集合論」第25頁與第30頁)。但是這個方法卻是Cantor很晚才想出來的。

Cantor爲了對抗Kronecker的壓迫，並且爲了協助年輕數學家免於遭受學術權威類似的壓迫，他很熱心的鼓吹組織另一個學會，德國數學聯合會(DMV)。這個學會1891年在Halle大學成立，Cantor擔任第一任會長，他的演講就是介紹他的最新發現：對角線法。

他利用對角線法重新證明〔0，1〕是不可數的。可是直到1899年8月31日他給Dedekind的信中，他才發現這個方法也可以用來證明子集定理：若m是無窮大的基數，則$2^m>m$。

(三)

在1882～1883年前後，Cantor發現一些奇怪的現象。例如，把所有的基數湊在一起，如果可以視爲集合，勢必出現一些矛盾的結果。此後集合論的各種「詭論」就陸陸續續出現。在Zermelo提出選擇公理之後，大家更是聚訟紛紜。數學家才猛然發覺已經是需要給集合論建立堅實的基礎的時候了。這就是公理化集合論的由來。

但是王先生和柯先生合著的「集合論」並不是採取公理化集合論的觀點。它雖然隨時提防不要掉入集合論的一些陷阱，基本上這仍然是一本直觀集合論的書，它的風格與P. Halmos的「Naive set theory」類似。事實上這正是絕大多數數學家對集合論的態度。

所以，「集合論」這本講義討論的題材是以Cantor關於基數與序數的理論爲主體。可

喜的是，當我們教「近世代數」、「點集拓樸學」或「泛函分析」時給學生補充的集合論知識，它全部都涵蓋了。例如，在第69頁我們可以找到 Zorn 引理的四個等價形式及其相互關係，Banach-Knaster-Tarski 定理與Cantor-Bernstein-Schröder 定理可以在第 32～34頁找到。超限歸納法在第 54 頁出現，〔0，1〕是不可數這個定理有兩種證明（第24～25頁）。由於這個定理是集合論發展史的第一個定理，大家可能有興趣知道它的原始的證明。Cantor 在 1873年的證明是這樣的。

假設〔0，1〕是可數集，令$\{x_r : r\in N\}$代表〔0，1〕的所有的數，並且當$r\neq s$時$x_r\neq x_s$。定義

$$a_1 = x_1 \;;$$

$$n_0 = \min\{r\in N : x_r > a_1\},\ b_1 = x_{n_0}\ 。$$

現在定義a_2，b_2如下：

$$m_1 = \min\{r\in N : r > n_0 \text{ 且 } a_1 < x_r < b_1\},\ a_2 = x_{m_1}\;;$$

$$n_1 = \min\{r\in N : r > m_1 \text{ 且 } a_2 < x_r < b_1\},\ b_2 = x_{n_1}\ 。$$

仿照這個方法定出a_3，b_3，a_4，b_4，……。可知

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots\cdots < b_3 < b_2 < b_1\ 。$$

考慮$u = \sup_{n\in N} a_n$。因爲$0 < u < 1$，故$u = x_t$，$t\in N$。但是根據n_i的定義，$t > n_i$其中$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots$。矛盾。

我相信這本講義對於開始起步唸數學的人或對近世抽象數學有興趣的人都有實質的幫助。直觀的集合論是現代數學家的共同語言。從另一個角度看，近代抽象數學不管從敍述問題的方式或考慮問題的態度，都或多或少的滲入集合論的思想。正因爲這種思維方式的調整（或「僞裝」？），使得很多初學者不能從高中數學的層次順利的過渡到近代數學的思考方式。「集合論」這本講義的作者像個細心的父母教導幼兒學步，它很有耐心的教導讀者怎樣像個數學家一樣的講話，怎樣容忍近世數學的「矯揉做作」，怎樣欣賞近世數學精確犀利的優點。余生也晚，未曾親受王先生的教導；但是我讀這本講義時，很自然的想像得到王先生三十年前在台大數學系講課的神采。

這本講義的底稿是當年王先生採用Moore教學法的筆記，它有一百多道精選的習題來訓練學生思考。正如王先生與柯先生在序言說明：

「現在的大學生逐漸失去撰寫數學證明的能力。一般在聯考時數學得高分的學生多能解很多固定形式的題目，但卻沒有設計證明的思路。甚至有些學生即使想到了證明定理的法子，也沒有足夠的能力把它用通順的文字寫出來。」

本書作者希望這本書能夠訓練學生撰寫證明，我完全同意，並且預祝它成功。

關於這本講義，我還有三點感想謹就教於王先生、柯先生和各位讀者。

一、有關中文數學名詞的譯名

海峽兩岸，甚至把日本也考慮在內，在數學名詞的譯名大體上相同，但是不同之處也很多。例如，onto mappings 有三種譯名，映成映像（請參考「集合論」第 31 頁），蓋射，滿射；continuum有譯成連續統與連續體兩種。

我認爲這種翻譯名詞目前不必強求一致，時間自然會解決問題。我的建議是，在某些譯名第一次出現時，作者不妨把各種較適切的譯名都提一下，以幫助讀者閱讀，並爲日後的譯名統一鋪路。

二、直積的符號

「集合論」第 9 頁集合A_i，$i\in I$，的直積記爲

$$\bigoplus_{i\in I} A_i$$

第 42 頁基數的無限積卻採用

$$\prod_{i\in I} m_i = \bigoplus_{i\in I} M_i \text{ 的基數，}$$

其中m_i是集合M_i的基數。

我想，這是不必要的，何不把直積的符號

記爲

$$\prod_{i \in I} A_i ,$$

這也符合範疇理論（category theory）的習慣用法。

三關於命題邏輯

在這本講義的底稿還有一部分是介紹命題邏輯。可能有人以爲命題邏輯是人類的良知良能，不教也罷。

四年前我的朋友林長壽先生教台大數學系一年級的初等微積分發現不少學生對於命題邏輯、集合運算都很生疏。今年我教數學系三年級的複變函數論也發現有人寫不出「$\forall\ \exists$……」的否定命題，更不要說把連續函數的定義寫得東倒西歪。

我想，現在不必責怪學生怎樣怎樣了。我只想拜託本書的作者再版時把命題邏輯加進去。全台灣各大學數學系的老師都會感謝你們的義舉。

最後，我願意再一次謝謝王九逵先生和柯慧美先生，他們費了這麼多心血編寫這本講義。這不是一本學術鉅著，可是它的作用是長久的，深遠的。

參考文獻

1. J. W. Dauben, George Cantor, Harvard University Press, 1979, Cambridge.
2. K. J. Devlin, Fundamentals of contemporary set theory, Springer-Verlag (Universitext), 1979, Berlin.
3. H. B. Enderton, Elements of set theory, Academic Press, 1977, New York.
4. I. Grattan-Guinness, The rediscovery of the Cantor-Dedekind correspondence, Jahresbericht DMV 76 (1974～75) 104～109.
5. I. Grattan-Guinness, From the calculus to set theory 1630～1910, Duckworth, 1980, London.
6. P. Halmos, Naive set theory, Van Nostrand, 1960, New York.
7. K. Hrbacek and T. Jech, Introduction to set theory, Marcel Dekker, 1978, New York.
8. G. H. Moore, Zermelo's axiom of choice, Springer-Verlag, 1982, Berlin.
9. W. Purkert, Cantor's views on the foundations of mathematics, in "The history of modern mathematics" edied by D. E. Rowe and J. McCleary, Academic Press, 1988, New York.
10. W. Purkert and H. J. Ilgauds, Geory Cantor 1845～1918, Birkhäuser, 1987, Basel.
11. J. Roitman, Introduction to modern set theory, Wiley, 1990, New York.
12. L. Vaught, set theory : an introduction, Birkhäuser, 1985, Boston.

後記：本文承蒙中央研究院數學所李國偉先生提供寶貴資料與改進意見，謹此致謝。

——本文作者任教於台灣大學數學系——