絶妙的數學家(五)

矢野健太郎著

顏　一　清譯

九 大上茂喬 (Ogami Mokio)

我沒辦法弄清楚大上茂喬的經歷。不過下面要介紹的是他發表在「東北數學雜誌」第十卷 (1916) 的定理。

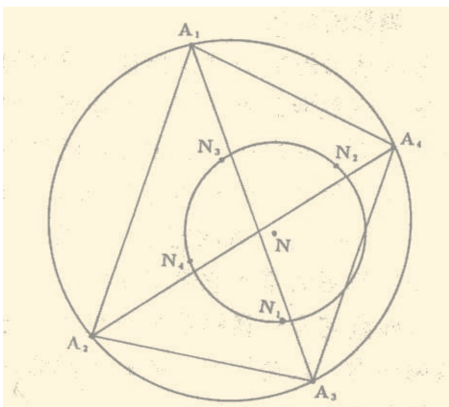
1. 發現無限多個定理的數學家

不管多偉大的數學家通常在他一生中發現的定理即使有幾百個, 幾千個, 畢竟是有限的。但是大上茂喬可發現了無限多個定理, 並且還加以證明。我們就來介紹它們吧。

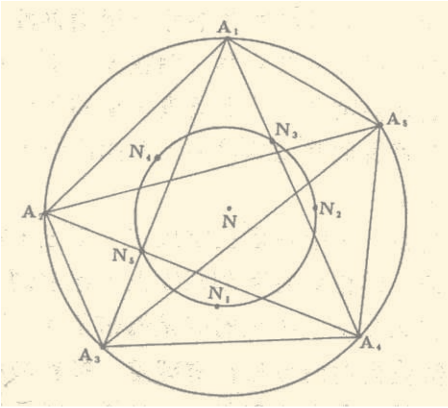
給定三角形 ABC 。令邊 BC, CA, AB 的中點各爲 D, E, F 。過三頂點 A, B, C 畫垂線交對邊 BC, CA, AB 於 P, Q, R ，則 AP, BQ, CR 共交於一點 H 。H 點稱爲三角形 ABC 的垂心。再令 HA, HB, HC 連線的各中點爲 X, Y, Z ，我們可證得 $D, E, F, P, Q, R, X, Y, Z$ 九點共圓。這圓叫做三角形 ABC 的九點圓。

這個精彩的定理在時下的中學教科書裡好像不出現了, 以前的中學教科書中一定有, 而且讓好學的中學生好振奮。

再考慮圓的內接四邊形 $A_1A_2A_3A_4$。除去其中一點所餘三點可成圓的內接三角形; 如去掉 A_1 點可成三角形 $A_2A_3A_4$ ，去掉 A_2 點成三角形 $A_3A_4A_1$ ，去掉 A_3 點成三角形 $A_4A_1A_2$ ，去掉 A_4 成三角形 $A_1A_2A_3$ 。令四個三角形 $A_2A_3A_4$ ，$A_3A_4A_1$ ，$A_4A_1A_2$ ，$A_1A_2A_3$ 的九點圓圓心各爲 N_1, N_2, N_3, N_4 ，則這四個九點圓圓心共圓，而稱爲圓內接四邊形 $A_1\ A_2\ A_3\ A_4$ 的九點圓。



接著, 考慮圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$。



其中除去一點所剩四點可形成圓的內接四邊形。如此, 可得五個圓的內接四邊形 A_2A_3 A_4A_5, $A_3A_4A_5A_1$, $A_4A_5A_1A_2$, $A_5A_1A_2A_3$。令諸九點圓圓心分別爲 N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, 則這五點共圓, 而所得圓稱爲圓內接五邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 的九點圓。

我們的定理依此無限地推演下去。

十 森本清吾 (Morimoto Seigo 1900—1954)

簡歷: 森本清吾的學歷只是舊制中學畢業, 然後自學數學, 通過文部省中等教員檢定考試 (數學科), 得到相當於高等師範學校畢業的資格。

接著, 他又通過文部省高等教員檢定考試 (數學科), 這相當於大學數學系畢業的資格。

他曾任東北大學數學系助教四年, 再自學繼續研究, 終於獲得理學博士學位。一般人是 ,大學畢業得理學士後繼續研究來取得理學博士, 他倒是沒有理學士頭銜的理學博士。

平時他早上在某中學每天授課四節, 下午和晚上在東京物理學校 (現在的東京理科大學) 擔任頗多課程。

他又爲了跟他一樣目標定在考文部省中等教員檢定考試、大學入學試、文部省高等教員檢定考試的人編寫「高等數學研究」這種雜誌。(譯註: 日本的文部省相當於我國的教育部)

1. **喝酒的顧問**

如今大學入學試一結束就會出現 幾 本有電話簿那麼厚的入學試問題解答專集, 這些書當然越早出版賣得越好, 所以那些出版社要儘快解出入學試的問題出書, 因而社內忙亂得像戰場般。

森本清吾還康健的時候出版商還是一樣地爲舊制高等學校與舊制專門學校的入學試解答忙出解答集。爲了解出這些問題, 他們會動員當時的大學生和研究生。但即使是研究所學生, 不見得會解題解得好。由他的經歷我們看得出森本清吾對解這一類問題高竿得很。因此有出版社請他在發行解答專集期間當顧問 ,以備那些工讀的學生們解不出問題的時候好討敎。

這個出版社的編輯部都因這些綁緊頭巾猛解考試題的工讀學生而忙亂得一場糊塗, 森本先生可就在客廳或是社長室涼快地喝著酒待著便得了。如果 幾個工讀學生彼此討論過而做不出的問題就派代表低著頭去請敎他。

而這位已經相當有醉意的森本先生, 描眼看一下幾個學生淸醒著也解答不出的問題, 就提起筆, 俐落地寫出解法來。

2. **快速解題者**

在簡介時我介紹過森本清吾他自個兒編寫爲文部省中等教員檢定考試、舊制高等學校及舊制專門學校入學試和文部省高等教員檢定考試以及一般的數學愛好者辦的一種數學月刊叫做「高等數學研究」。

有一次文部省高等教員檢定考試的日期和「高等數學研究」的原稿截止日期重疊, 這一類考試考試一開始, 外邊的人都可以要到考試題, 森本先生等到考試開始便要來一份試題, 當場用原稿紙寫好模範答案。當考生從試場出來時「高等數學研究」裡的模範解答原稿已經在印刷所的人的手中了。

這個考試的內容包羅舊制大學數學系三年內學到的全部數學, 所以我很懷疑今後會不會再出現像森本先生那般能快速解題的人來。

3. 下巴上的痣

森本先生是自己苦讀數學而熬出頭的, 所以很了解初學者不容易懂的地方。他在東京物理學校授課很受歡迎, 教室都容納不下要聽他上課的學生。

這個學校學生的座位沒有固定, 所以他上課的時間坐靠近講台的學生們全是他的熱心聽衆。

大凡人迷上誰都喜歡模仿那個人的動作。而森本先生下巴那兒有個大痣, 他每想一件事就有摸它的習慣。他平時上課常常右手拿粉筆, 空著的左手摸著痣講話。

這不是我親眼看到的, 不過聽上過森本先生課的人說那些聽他課的學生幾乎全部都邊摸自己那沒長痣的下巴而邊聽講。

但是有時候森本先生會在下巴的痣上貼著一塊大紗布來教室, 那 ,表示前一個晚上他用功過度, 摸痣太厲害而發炎所致。

當天他上課中總不會再摸下巴了吧, 那, 學生們的反應到底怎樣我倒聽漏了。

3. 僞幣的問題

從森本清吾的經歷看得出他是喜歡思考的數學家。這兒我們來介紹一下他書上的一個有趣的問題, 它本來是登載在美國爲中小學以至大學教師辦的數學雜誌 American Ma- thematical Monthly 一九四五年一月號的, 這問題一登就聲名大噪。它是這 樣的:

「有外觀完全一樣的錢幣八枚和一台天平。錢幣中有一枚是假的, 較輕。試問如何使用天秤兩次來挑出僞幣?」

誰都會想到的方法是, 先把錢幣各分成四個秤一次, 較輕的四個分成兩兩再秤一次, 輕的那兩個又各分爲一個在天平上一秤, 輕的便是僞幣了。不過這麼一來用了天平三次, 其實這個問題只使用天平兩次則可, 這個妙法是:

先從八枚中各取三枚放在天平上, 如果成平衡, 僞幣便在所剩兩枚上, 把它們各放一枚在天平上, 較輕的就是僞幣了。

假使先前的各三枚有輕重, 從較輕的三枚中各取一個放在天平上, 如果平衡, 剩下的一枚是僞幣, 如果不平衡, 較輕那一枚便是僞幣。

如此, 各使用天平兩次都找得出僞幣來。

4. 幽靈煙囱

我在讀東京大學理學院數學系和研究所的時候, 系裡每星期五有一種研究會, 叫做「

星期五談話會」, 住在東京的前輩們在會中發表他們的研究結果或是介紹一些新到雜誌的訊息等。那是一種小規模的研究會。不過一年當中也有數次擴大這個會, 從外頭邀請演講者和客人盛大地開會一番。

一次, 森本淸吾被邀請在擴大的「星期五談話會」中演講。他就以「數學的問題這一類東西『俯拾即是』喔!」爲開場白講了下面「幽靈煙囪」的故事:

如今已被毀掉而不見了, 不過以前千住這個地方有被稱爲「幽靈煙囪」這個東西。

森本先生有一段時期都搭常磐線到在松戶的學校。從上野搭上常磐線看左方, 在三河島站附近會看到三支煙囪, 再過一陣它們變成四支, 火車就到南千住站了。出南千住站不久本來有四支的煙囪突然變成兩支, 再變成一支, 又變成三支、一支、兩支, $\cdots$ 簡直會眼花撩亂般變、變。最後到達北千住站時煙囪有四支。出了北千住站不久煙囪又變成三支了。過了這一帶, 火車便往煙囪相反方向行駛過去。再也見不到它們了。

就如上面所說, 四支密集在一起的煙囪因觀測處不一樣而變成一支、兩支、三支、四支。因此有了這個別緻的名字「幽靈煙囪」。

煙囪有四支, 我們且不管它們的粗細, 令它們的所在地是平面上的四點 A, B, C, D 吧。

這些煙囪從同平面上的某些點來看, 一般情形之下應該都有四支。它們變成三支或是兩支到 底是從那些點看過去的呢?

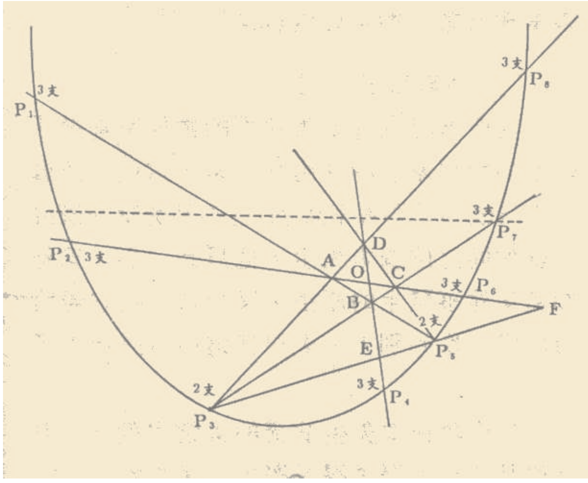


圖 I

首先我們來討論煙囪變成三支的情形。這時候看起來有兩支重疊在一起, 也就是 ,我們從四支煙囪所成四邊形的各邊延長線上或是兩對角線上看過去的時候。比如從 A, B 延線上的一點 P_1 看四支煙囪, 那麼 A, B 兩點重合, 煙囪看起來有三支。同樣, 從四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC 的延線上一點 P_2 或是 P_6 看, A, C 兩點重疊, 所以煙囪看起來只有三支。

又, 從四邊形 $ABCD$ 的兩對邊 AD , BC 交點 P_3 來看, 則 A, D 重疊, B, C 重疊, 所以看起來只有兩支煙囪。從兩對邊 AB , CD 交點 P_5 看上去, A, B 會重疊在一起, C, D 也重疊, 所以看起來煙囪也只有兩支。

如果從對角線 DB 的延線上的點 P_4 看煙囪, 則有三支, 從 BC 邊延線上的點 P_7 , 邊 AD 延線上的點 P_8 看起來煙囪也都三支, 這很顯然。

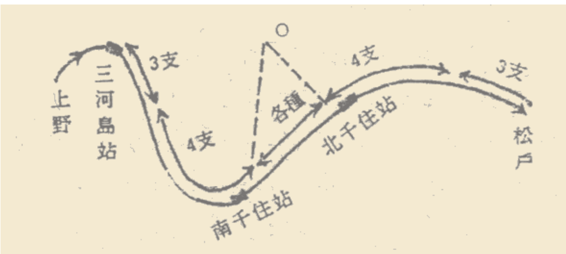


圖 II

因此, 假使常磐線像圖 II 般繞著煙囪行駛, 則在圖 I 諸點 $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ 煙囪看起來忽而兩支, 忽而三支, 只要我們知道各 P_i $(i = 1 \cdots 8)$ 點的位置, 四支煙囪 $A\ B\ C\ D$ 的位置便可以推算出來。

首先從 P_1P_5, P_2P_6 兩線的交點得到 A , P_1P_5, P_3P_7 兩線的交點是 B , 二直線 P_2P_6, P_3P_7 交於 C , 而二直線 P_3P_8 與 P_4B 交在 D 上 (參看圖 I)。

但是實際上常盤線只是繞幽靈煙囪的週遭約略走半圈而已, 所以圖 I 中畫了虛線以上的部份並不知道, 也就是說 P_1, P_7, P_8 三點未知。因此, 我們的問題變成: 給定圖 I 中的 P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 五點, 是否可求出幽靈煙囪所在點 A, B, C, D ?

我們的問題受到這樣的限制後就沒那麼簡單了, 多少要一些數學知識。

起先, 我們把四支煙囪的地點視為 A, B, C, D , 做成四邊形 $ABCD$ 。如今, 在我們的問題中演主要角色的是這四點而不是連接這些點的直線。

任意三點不共線的四點所成圖形稱爲四角形 (在這以前譯者都以我們的慣例叫成四邊形) , 同樣地, 任意三直線不共點的四直線所成圖形稱做四邊形。我們現在所關心的是直線 AB, BC, CD, DA 所成四邊形。

由四直線, 其中任何三直線不共點, 與這直線兩兩相交而成的六個交點所成圖形叫做完全四邊形, 四直線稱爲邊, 交點稱爲頂點, 不在同一邊上的一對頂點 (參看圖 I) A, C ; B, D ; P_3, P_5 相互稱爲對頂點, 聯對頂點的直線叫做對角線。

在圖 I 中令完全四邊形 $ABCDP_3P_5$ 的一對角線 P_3P_5 與另二對角線 DB, AC 的延線交於 E, F。再請諸位回想起中學時學過的 Ceva 定理和 Menelaus 定理吧。

Ceva 定理是: 三角形 DP_3P_5 中取一點 B , 令 DB 與 P_3P_5 交於 E 點, P_3B 與 P_5D 交於 C 點。P_5B 與 DP_3 交於 A 點, 則

(1) $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{AP_3}} \cdot \dfrac{\overline{P_3E}}{\overline{EP_5}} \cdot \dfrac{\overline{P_5C}}{\overline{CD}} = 1$

Menelaus 定理是: 一直線與三角形 DP_3P_5 的各邊 DP_3, P_5D, P_3P_5 分別交於 A, C, F 則

(2) $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{AP_3}} \cdot \dfrac{\overline{P_3F}}{\overline{FP_5}} \cdot \dfrac{\overline{P_5C}}{\overline{CD}} = 1$

。比較 (1) (2) 兩式可得

$$\frac{\overline{P_3E}}{\overline{EP_5}} = \frac{\overline{P_3F}}{\overline{FP_5}}。$$

也就是說, E, F 兩點內、外分線段 P_3P_5 。這樣的四點 P_3, P_5, E, F 稱爲成調和點列。因此若線段 P_3P_5 給定, 其上一點 E 已知, 則可求得 P_3P_5 直線上的另一點 F , 使 P_3, P_5, E, F 成調和點列, 反之亦然。

反過來說, 這樣成調和點列的四點可視爲一個完全四邊形的二對頂點及它們連成對角線後與其他二組對角線的二交點所成。

現在讓我們轉移目標到問題上來吧。我們要知道的是: 給定五點 P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, 是否可定出幽靈煙囪的四點 A, B, C, D ?

首先我們可以定出 P_2P_6 的連線與 P_3P_5 的連線交點 F 。從而定出在直線 P_3P_5 上與點 P_3P_5 成調和點列的點 E 、F 中的 E 點。點 D, B 在直線 EP_4 上。如果在直線 P_4E 上任取一點 D , 則二直線 DP_3 與 P_2F 交於 A , 二直線 AP_5 與 DP_4 交於 B , 二直線 P_3B 與直線 P_2P_6 交於 C , 這樣就決定了 A, B, C, D 四點 (參照圖 I)。

但是我們在直線 P_4E 上任取了一點 D , 所以單由五點 P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 已知, 不能唯一地確定幽靈煙囪所在點 A, B, C, D 。

不過, 在實際的問題上, 如果看成四支煙囪 A, B, C, D 非常密集在一起, 因而重疊成一點, 則直線 P_2P_6 與直線 P_4E 的交點 O 可視爲幽靈煙囪所在的位置。這便是森本清吾談話的主要內容。

5. H教授的研究

我把出現在這本書裡面的數學家稱做「絕妙的數學家」的理由之一是, 這些人認眞想事情既不是要獲取專利, 也不是想賺一筆錢。就如同這位森本先生, 他只是一心一意想知道某件事發生的原由, 又想法子把它弄明白而已。換到別人, 老早把這件事跳過去了。

當時聽森本先生演講的人當中就有 H君 (他是東京大學數學系學生, 後來當上某國立 K 大學堂堂的教授) 受了他的影響, 還更進一步詳細地研究了煙囪問題。各位, 您說這些數學家妙不妙呢?

聽了森本先生的話後 H君立即去搭常磐線, 觀測幽靈煙囪。H 君假設常磐線的速度一定而用計時表算出幽靈煙囪變成一支、兩支、三支和四支的各地點, 在地圖上, 做上記號再劃成簡圖。

森本先生講述時爲了要把問題講得容易, 簡化了幾個事實。H君實地觀測的結果跟森本先生的話有幾個不同點。

森本先生的話裡沒有考慮到煙囪的粗細, 事實上煙囪有粗細, 所以會發生四支煙囪變成

(一) 一支的情況。

又 , 實際上常磐線行駛的路徑並不會像森本先生的圖 I 那樣, 而在 P_3 與 P_5 之間幾乎成一直線, 因此

(二) 不能給出 P_4 與 E 的連線。

而且常磐線也不行駛圖 I 中的 P_6 點, 所以

(三) 不能給定 P_6 點。

由這些理由 H 君把煙囪的寬度也考慮在內, 想求出四支煙囪的位置和它們的配置圖。爲此, 他做了他認爲非常妥當的三個假定:

(1) 四支煙囪的粗細一樣。

(2) 四支煙囪形成一個平行四邊形的四個頂點。

(3) 四支煙囪相互之間的距離比起煙囪與電車的距離小得多。

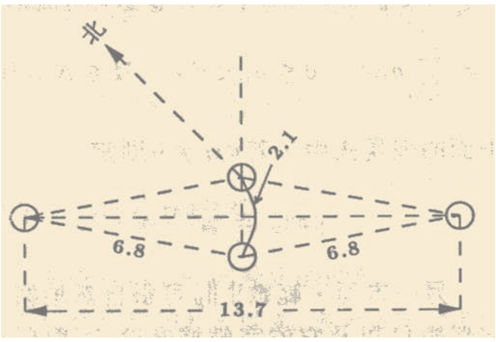


圖 III

如果我仔細說明 H 君由他的觀測以及他的假設出發, 定出煙囪的粗細與它們的配置, 便有太深入這個問題之嫌。就此割愛。不過 H 君由搭上常磐線觀測而眞正發現了四支煙囪的位置, 如圖 III 。圖中煙囪的直徑爲一單位長。

6. **在葬禮上**

森本先生沒有在教室裡直接教過我。不過他編纂的「高等數學研究」在我考大學時幫了大忙, 我在東京物理學校當講師時在教員休息室裡也常向森本先生請益。所以他的葬禮我也去參加。

那是外國式的葬禮儀式。我祈求森本先生的冥福後想退出時聽遺族中有人說:

「森本以爲來參加他的葬禮中必有許多數學家, 他想告訴諸位數學家一些話而錄了音下來, 請務必聽一聽。」

據遺族的人說, 森本先生早先就接受某廣播電台的委託, 爲大學入學考試學生開數學講座。他病倒後沒法子去廣播電台, 電台便把錄音機接到他的病房, 繼續工作。

當時不是家家都有錄音機的時代。森本先生不知什麼時候就利用電台的錄音機, 留下要給參加他葬禮的數學家遺言的錄音帶。透過這個錄音帶森本先生用淸晰而有力的語調講了如下的話:

「今天參與我的葬禮諸位中必有多位是數學家, 我想給大家說一說我的經驗:

自從我得了數學教員的資格後, 我一邊做數學研究, 一邊當教員, 陀螺般地工作下來。用常人的眼光來看, 我大概身體耗用過度。

眞的, 數學家常常因熱中於他們的數學, 研究過度而忽略了身體的健康。

諸位數學家, 我就是好例子。請各位多多留心身體的健康, 繼續做數學研究!」

我一向受森本先生許多關照, 沒想到最後還接受他這麼好的敎誨。