時間序列模型的定常分配

郭美惠

這篇文章最主要是想要介紹時間序列模型是如何應用隨機過程的方法來證明定常分配的存在性。在第一個段落, 我們將簡略介紹時間序列模型的發展。在第二個段落, 主要是討論時間序列模型的定常分配。第三個段落則是介紹如何應用馬可夫鏈的方法來證明定常分配的存在性。

時間序列模型的發展

何謂時間序列? 凡是一組資料是隨著時間的先後順序而取得的, 就可稱爲是一組時間序列的資料。最常見的例子, 譬如: 某段時間內所記錄的每日股票市場; 每年太陽黑子的平均數目等等。爲了可以解釋時間序列的隨機性及不可預測性, 一般都是將時間序列視爲一個隨機過程的實現值 (realization)。取得了一組時間序列之後, 下一步即是尋找一個較能適切解釋這組序列特性的模型, 更進一步希望能應用這個模型來預測這組序列未來的值。起初最常爲人們使用的模型是下列的線性自迴歸移動平均模型:

$$\begin{aligned} & x_n + a_n x_{n-1} + \ldots + a_p x_{n-p} \\ = \quad & \varepsilon_n + b_1 \varepsilon_{n-1} + \ldots + b_q \varepsilon_{n-q}, \end{aligned}$$

在此x_n代表觀測值;ε_n代表隨機誤差;
$a_1, \ldots, a_p$及$b_1, \ldots, b_q$是這個模型的參數。

然而在這大自然中到處可見非線性的現象, 例如在時間序列中常見的極限周期 (Lim- it Cycles); 隨機參數等等。上面介紹的線性自迴歸移動平均模型卻無法解釋這些非線性的現象。因此爲了補充線性模型的不足及解釋非線性的現象, 人們漸漸的著重於非線性時間序列模型的研究。最早較有系統從事非線性時間序 列模型的研究, 可以追溯到 Wiener (1958)。他提出所謂的 Volterra 無窮級數展式:

$$\begin{aligned} X_t \quad = \quad & \sum_{u=o}^{\infty} g_u U_{t-u} + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty} g_{uv} U_{t-u} U_{t-v} \\ & + \sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{\infty}\sum_{w=0}^{\infty} g_{uvw} U_{t-u} U_{t-v} U_{t-w} \\ & + \ldots。 \end{aligned}$$

x_n代表觀測值,U_n代表隨機誤差,g_u,g_{uv},...代表模型的參數。
然而從應用的觀點, 這個展式包含無窮多的參數, 我們無法從有限的時間序列資 料來估

計這些參數, 因此人們又先後的提出各種不同的非線性時間序列模型, 嘗試著解釋所觀測的非線性現象。目前較常見的非線性模型, 例如:

(1) **隨機係數自迴歸模型**(Nicholls & Quinn,1982)。例:

$$x_n = a + b_n x_{n-1} + \varepsilon_n,$$

a是一個常數,b_n是一組獨立且具有相同分佈的變數並且和隨機誤差ε_n獨立。

(2) **雙線性模型**(Granger & Andersen,1978) 例:

$$x_n = a x_{n-1} + b x_{n-1}\varepsilon_{n-1} + c\varepsilon_n。$$

(3) **指數自迴歸模型**(Ozaki,1985)。例:

$$x_n = (a + b e^{-c x_{n-1}^2}) x_{n-1} + \varepsilon_n。$$

(4) **自身激動的門檻自迴歸模型**(Tong,1983)。例:

$$\begin{aligned} x_n &= a x_{n-1} + \varepsilon_n, \quad 當\ x_{n-1} > r \\ &= b x_{n-1} + \varepsilon_n, \quad 當\ x_{n-1} \le r。\end{aligned}$$

(5) **狀態相依模型**(Priestly,1980)。

定常分配

在許多物理及工程方面的問題, 所收集的時間序列資料時常會呈現一種所謂的“統計均衡”狀態, 也就是說, 如果我們將收集到的時間序列分成數個時段來觀察, 則在不同時段中, 這個時間序列所對應的隨機過程在統計方面的性質都幾近相同, 換言之, 這個過程的統計性質並不隨著時間而改變。一個隨機過程若呈現上述的“統計均衡”狀態, 我們就稱它爲一個穩定的(stationary)過程, 也就是說這個過程具有一個定常分配。數學上的定義就是: 對任何的正整數k和任何的整數$t_1,\ldots,t_k$及h, $(X_{t_1},\ldots,X_{t_k})'$與$(X_{t_1+h},\ldots,\ X_{t_k+h})'$ 有相同的共同分佈。由於許多實際收集到的資料時常呈現上述的“統計均衡”狀態, 因此我們用來解釋這組資料的模型, 何時會使得相對應的過程是穩定的, 這在時間序列模型的研究中, 可以說是一個十分重要的課題。對於線性自迴歸移動平均模型而言, 要回答這個問題, 我們只須考慮其相對應的特徵多項式:

$$\phi(B) = 1 + a_1 B + \ldots + a_p B^p,$$

$a_1,\ldots,a_p$ 即爲自迴歸係數,B代表後移算子。當$\phi(B) = 0$的解皆在單位圓之外, 則由這個線性自迴歸移動平均所定義的過程$\{X_n\}$就有一個穩定的解, 也就是說這個過程具有一個定常分配。許多時間序列雖然呈現非線性現象也同時具有“統計均衡”的狀態。因此, 在非線性時間序列模型的研究中, 何時該模型具有定常分配, 也是一個重要的課題。然而在非線性模型的研究中, 我們並沒有特徵方程式可以來決定定常分配的存在與否。一般研究這個問題的方法, 即是考慮非線性模型所對應的馬可夫鏈, 再進而研討何時所對應的馬可夫鏈具有定常分佈, 我們將於下節討論這個問題。

馬可夫鏈與定常分佈

考慮下面的p階非線性自迴歸模型:

$$X_n = f_\vartheta(X_{n-1}, \ldots, X_{n-p}) + \varepsilon_n,$$

X_n代表觀測值;$f_\vartheta(\cdot)$是從$\mathbf{R^p}$到R的映射, $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_\ell)'$是參數向量; ε_n則爲一組獨立且具有相同分佈的隨機誤差。

在第一段落所提到的線性、指數及自身激動的門檻自迴歸模型均爲此p階非線性自迴歸模型的特例。如果我們令$\vec{X}_n = (X_n, \ldots, X_{n-p+1})'$,$\mathcal{F}_n$爲由$\cdots$,$\vec{X}_{n-1}$,$\vec{X}_n$所生成的$\sigma$場, 及 $\mathcal{L}(\vec{x}_n)$代表$\vec{x}_n$的機率分佈, 也就是說$\mathcal{L}(\vec{X}_n)(A) = P(\vec{X}_n \in A)$。由於$\mathcal{L}(\vec{X}_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \mathcal{L}(\vec{X}_{n+1}|\vec{X}_n) = P(\vec{X}_n, \cdot)$, 對所有整數 n 均成立。因此$\vec{x}_n$是一個取値於 ($\mathbf{R^p}$,$\mathcal{B}^p$)上的馬可夫鏈, 它的推移機率就是

$$\begin{aligned} & P_\vartheta(\vec{x}, A) \\ = \; & P(\vec{x}_n \in A | \vec{x}_{n-1} = (x_1, \ldots, x_p)') \\ = \; & \int_{T(A_{\vec{x}})} g(t - f_\vartheta(x_1, \ldots, x_p))dt, \end{aligned}$$

在此g代表隨機誤差ε_n的密度函數, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_p)'$,$A_{\vec{x}} : \{\vec{z} = (z_1, \ldots, z_p)' \in \mathbf{R^p}, z_i = x_i, i \geq 2, \vec{z} \in A\}$, $T : \mathbf{R^p} \to \mathbf{R}$是對應到第一個座標的投影, 也就是說$T(\vec{x}) = x_1$。因此要問何時這個非線性自迴模型所對應的過程$\{X_n\}$是穩定的, 是等價於問何時其相應的馬可夫鏈是遍歷的 (Ergodic), 可就是說何時這個馬可夫鏈會存在一個起始分佈, 使得這個馬可夫鏈若一開始即遵循這個起始分佈出發, 則它所衍生的過程將會是穩定的。在此我想介紹關於這方面最常爲人所使用且十分有趣的一個定理。在這定理之前, 我必須先介紹幾個在定理中所提到的定義。

定義1: 假設$\{Y_n\}$是一個取值於$(\mathcal{X}, \mathcal{F})$上的馬可夫鏈,$\phi$是一個定義在$\mathcal{F}$上的非不足道的 (non-trivial) σ – 有限測度。若對所有的$y \in \mathcal{X}$, 只要$\phi(A) > 0$, 則$\sum_n 2^{-n} P^n(y, A) > 0$, P^n代表Y_n的n步推移機率。那麼我們則稱 $\{Y_n\}$是一個ϕ – 無法削減的(irreducible)馬可夫鏈。

例: 令μ_p代表($\mathbf{R^p}$, $\mathcal{B}^\mathbf{p}$)上的 Lebesgue 測度。$\{\vec{X}_n\}$爲上述P階非線性自迴歸模型所對應的馬可夫鏈。如果我們假設隨機誤差ε_n的密度函數$g(x)$, 在所有的x點上都是正的; 則由上述$\{\vec{X}_n\}$推移機率的表示法, 我們可推得只要 $\mu_p(A) > 0$, 則 $P_\vartheta(\vec{x}, A) > 0$。因此在$g(x) > 0$的假設下,$\{\vec{X}_n\}$ 就是一個μ_p – 無法削減的馬可夫鏈。

定義2: 推移機率 $P(x, \cdot)$ 是強連續的, 若且唯若, 對所有有界可測的函數$h(\cdot)$,$[\int P(x, dy)h(y)]$是連續有界的。

定理 (Tweedie,1975): 假設一個馬可夫鏈$\{Y_n\}$是ϕ – 無法削減的, 而且其推移機率是強連續的。如果$\{Y_n\}$滿足下面的條件,$\{Y_n\}$就是遍歷的。

(1) 在$\mathcal{B}^P$中存在一個緊緻集合K, 使得$\phi(K) > 0$, 並且存在一個非負的常數C, 使得對所有不在 K 中的 y,$E\{\|Y_n\| - \|Y_{n-1}\| \, |Y_{n-1} = y\} \leq -C$。

(2) 而且存在一個非負的常數B, 使得對所在K中的y, $E\{\|Y_n\| - \|Y_{n-1}\| \, |Y_{n-1} =$

$y\} \le B < \infty$。在此 $\|\cdot\|$ 代表定義在 $\{Y_n\}$ 狀態空間上的範數。

假若我們將定理中的緊緻集合K, 想像爲這個馬可夫鏈狀態空間上的一個"中心"。則上述定理中所提到的第一個條件:$E\{\|Y_n\| - \|Y_{n-1}\| \, |Y_{n-1} = y\} \le C$, 也可以解釋如下: 如果這個馬可夫鏈$\{Y_n\}$目前的位置是在這個中心$(K)$的外面, 其下一步的位置, 平均的來說, 將會往這個中心更靠攏一些。這個中心就好像是一個磁場存在一種引力, 使得這個過程若走到中心之外, 仍會有一種走回趨向中心的潮流。而在這個定理的第二個條件:$E\{\|Y_n\| - \|Y_{n-1}\| \, |Y_{n-1} = y\} \le B < \infty$, 也可以解釋成: 如果這個馬可夫鏈目前的位置是在這個中心(K)之中, 則其下一步的位置, 平均的來說也就不會偏離中心太遠。關於許多非線自迴歸模型的遍歷性, 例如: 指數自迴歸模型; 自身激動的門檻自迴歸模型, 都是可以應用這個定理的這兩個基本條件來證明。

結語

一組時間序列的觀測值, 事實上也可視爲一個隨機過程的實現值, 因此關於時間序列的統計性質可說是經由它所對應的隨機過程來討論。我在這裡所討論只是關於時間序列的穩定性與其對應馬可夫鏈遍歷性的關係。在這篇文章中, 最主要是介紹一個主要的定理以及它的核心觀念。讀者若欲深入了解關於馬可夫鏈在一般狀態空間的遍歷性問題, 請參閱 Tweedie(1975) 及 Nummelin(1984)。

參考文獻

1. Granger, C. W. J. and Andersen, A. P. (1978). "An Introduction to Bilinear Time Series Models." *Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen.*

2. Nicholls, D. F. and Quinn, B. G. (1982). "Random Coefficient Autoregressive Models: An Introduction." *Lecture Notes in Statistics* 11, Springer-Verlag, New York.

3. Nummelin, E. (1984). "General Irreduci- ble Markov Chains and Nonnegative Operators." *Cambridge Univ. Press, Cambridge.*

4. Ozaki, T. (1985). "Nonlinear Time Series Models and Dynamical Systems." *Handbook of Statistics* Vol. 5, Eds. Hannan, E. J., Krishnaiah, P. R. and Rao, M. M. North-Holland, pp. 25-83.

5. Priestly, M. B. (1980). "State-Dependent Models: A General Approach to Non-linear Time Series Analysis." *J. Time Series Anal.,* Vol. 1, pp. 47-72.

6. Tong, H. (1983). "Threshold Models in Nonlinear Time Series Analysis." *Lecture Notes in Statistics* 21, Springer-Verlag.

7. Tweedie, R. L. (1975). "Sufficient Con- ditions for Ergodicity and Recurrence of Markov Chains on a General State Space." *Stochastic Process and their Applications*, Vol. 3, pp. 385-403.

8. Wiener, N. (1958). “Nonlinear Problems in Random Theory,” *M.I.T. Press, Cambring, Mass.*

—本文作者任教於國立中山大學應用數學系—