數學中的公理化方法 (上)

吳開朗

數學公理化的目的, 就是把一門數學表述爲一個演繹系統。這個系統的出發點, 則是一組基本概念和若干條基本命題, 基本概念必須是對數學實體的高度純化和抽象, 基本命題則是對基本概念相互關係的制約和規定。陳述公理化方法的推理基礎, 在古典學中多數都是採用自然語言來規定基本概念的定義, 或加入一些特定的符號, 這種語言類似於現代邏輯中的二階語言 (Second-order language)。當今世界, 公理化方法已廣泛地應用於數學的各個近代分支, 並且日益向其他自然科學滲透。1978年8月, 在凱爾蘇赫 (Karlsruhe) 舉行的第三屆國際數學教育會議上, 當代數學界最高獎菲爾茲 (Fields) 獎獲得者 M.F. 阿蒂亞 (Atiyah, 1929 —) 在其論文《純數學的發展趨勢》中, 稱二十世紀爲數學的 "抽象公理化時代"。在這個時代裡, 公理化方法不僅是衡量數學純不純的標準, 而且也是衡量數學美不美的標準。

一、數學公理化方法的萌芽

古希臘是當時歐洲商業的中心, 在長達一千多年的光輝燦爛的希臘文化中, 數學更加絢麗多彩。在數學發展史上, 最原始最有影響的公理系統, 是歐幾里得 (Euclid, 約公元前 330 — 公元前 275) 所建立的初等幾何公理系統。這個公理系統乃是他的世界名著《原本》[1] 的理論基礎。然而, 遠在歐幾里得之前, 在古代巴比倫人、埃及人和希臘人那裡, 就已產生了公理化思想的萌芽。公元前六世紀時期, 希臘數學的鼻祖泰勒斯 (Thales, 約公元前 624 – 公元前 547) 就把邏輯論證引入於數學之中。及至希伯索斯 (Hippasus) 發現無公度線段之後, 畢達哥拉斯 (Pythagoras, 公元前 580 — 公元前 497) 學派即逐步認識到直觀、經驗和實踐並非絕對可靠, 希望對過去由經驗而直接得到的幾何知識都能夠用嚴格的邏輯推理來加以證明。

柏拉圖 (Plato, 公元前 427 — 公元前 347) 曾經提出:"迫使靈魂用抽象的數來進行推理, 而厭棄在辯論中引入可見的和可捉摸的現象"。(《共和國》) 在這種思想的指導下, 他的門生已開始依據邏輯次序來整理幾何定理, 並且引用一些大家公認的原理, 作爲推理的基礎。這個學派的主要人物鐵塔斯 (Thextetus, 公元前 480 年前後) 和歐多克斯 (Eudoxus, 公元前 408 — 公元前 355) 的研究成果, 後來分別被歐幾里得收集於《原本》的第十卷和第五卷之中。

亞里斯多德 (Aristotle, 公元前 384 — 公元前 322) 認爲秩序和對稱是美的主要因素, 但二者都可以在數學中找到。他是柏拉圖學園的一位高才生。他在自己的一些著作中曾經闡述過公理化思想的基本原理, 並且提出:“原理的存在是必須接受的, 而其他東西則需要證明”。[2] 因此, 很多數學史家都認爲數學公理化思想的萌芽始自於亞里斯多德的著作。

二、數學公理化方法發展的三個階段

白俄羅斯共和國列寧大學教師進修學院哲學教研室主任哲學博士茹科夫在《數學的哲學問題》一書中, 把公理學的結構分爲三種: 即含內容的公理學、半形式化公理學和形式化公理學。[3] 然而, 從公理學的形式化發展之歷史過程來看, 這三種公理學亦可稱之爲是數學公理方法形式化發展的三個階段: 即產生階段、完善階段和形式化階段。

1.公理化方法的產生階段

亞里斯多德是古希臘形式邏輯的創始人, 他總結了當時已經積累起來的邏輯知識, 以演繹證明的科學 (主要是數學) 爲實例, 建立了邏輯學的初步體系。由於歐幾里德本人也是柏拉圖學園裡的學生, 並且在裡面學習過數學, 因而, 亞里斯多德所奠定的形式邏輯以及建立科學體系的方法論原則, 對於歐幾里德的數學研究產生了積極的影響。

亞里斯多德提出: 公理應爲“最普遍的眞理”。歐幾里德欣然應諾, 並以此作爲劃分公理與公設的依據。他在建立《原本》的公理系統時, 即是依據邏輯相關性的原則, 先給出點、線、直線、面、平面等一些原始概念的直觀定義, 接著又給出由這些原始概念所派生的概念之定義, 如兩條直線間的角、直角、平角、圓、直徑等, 像這樣一連列出23個定義、5條公設和 9 條公理。這 9 條公理可適用於當時的一切數學, 而5條公設則是專門對於幾何學而設立的。[4]

歐幾里得以這些定義、公設和公理爲基礎, 以形式邏輯爲工具, 演繹出467個定理, 築起了一座數學知識的大廈—《原本》。正如《歐德摩斯摘要》一書中所說的: “把幾何原理聯繫到一起, 把歐多克斯的許多定理有次序地安排起來, 把鐵塔斯的許多定理加以完善化, 並對前人未經嚴謹證明的許多東西給以無可爭辯地闡明的, 乃是歐幾里得”。[5] 在這個階段裡, 由歐幾里得所建立的初等幾何公理系統, 就是含有內容的公理學的一個光輝典範。它以體系優美而著稱於世, 猶如一座雄偉莊嚴的科學寶殿, 使後世許多數學家都沉醉於它那迷人的溫馨的美的光芒之中。

《原本》的影嚮和作用, 超過任何一本數學著作, 僅是手抄本就流傳了1800多年。自1482年印刷以後, 世界各國的主要語種幾乎都有譯本, 總印數超過一千版次。兩千多年來, 一些著名科學家學習數學時, 大都是以《原本》或其改編本作爲入門的階梯。

2.公理化方法的完善階段

現在世界各國的中學幾何課本, 仍然受到《原本》的傳統影響, 然而, 它的缺陷早已爲古代學者們所察覺。由於第五公設排在最後, 應用較少, 而且在陳述上也有些累贅, 致

使許多大數學家都試圖利用其他公理來證明它, 但其結果都以失敗而告終。

十九世紀俄國年輕數學家 H.N. 羅巴切夫斯基 Lobatchevsky (1793 — 1856) 認眞分析了前人的經驗與教訓, 大膽地提出一個新觀念: 可能會存在第五公設不能成立的新幾何系統。在這種思想的指導下, 他一舉而創立了羅巴切夫斯基幾何學, 簡稱羅氏幾何學, 又稱爲雙曲幾何學。當時獨立地發現這種新幾何理論的, 還有大數家 K.F. 高斯 (Gauss, 1777 — 1855) 和青年數學家 L. 鮑耶 (Bolyai, 1802 — 1860)。不久, 德國數學家 G. F. B. 黎曼 (Riemann,1802 — 1866) 從另一側面否定第五公設, 又發現了黎氏幾何學, 或稱爲橢圓幾何學。這兩種幾何學統稱爲非歐幾何學。

非歐幾何學的建立, 不僅爲公理化方法的進一步發展奠定了基石, 而且爲新數學理論的發現提供了先例, 接著有許多數學家致力於公理化的研究。在1871 — 1872年, 德國數學家 G.康托 (Cantor, 1845 – 1918) 和 J.W.R. 戴德金 (Dedekind, 1831 –1916) 不約而同地提出了連續公理。在1882年, 德國數學家 M. 巴許 (Pasch, 1843 – 1930) 出版了《新幾何學講義》, 他在該書中所給出的初等幾何公理系統, 前12條相當於日後希爾伯特系統中的 I_1 — I_8 與II_1 — II_4 , 他定義合同概念所使用的10條公理, 相當於日後希爾伯特系統中的 III_1 — III_5。然而, 該系統不僅是未曾分組, 而且條數也太多, 顯然不能給人以簡單性的美感! 意大利數學家 G. 皮阿諾 (Peano, 1858 –1932) 和他的學生 M. 庇愛里 (Pieri, 1860 – 1904) 在1889年和1899年, 分別發表了兩篇關於初等幾何公理系統的論文[6], 他企圖使公理條文的個數達到極少, 以致公理的表述十分冗長, 結果他所提出的系統變得十分龐雜。

德國著名數學家 D. 希爾伯特 (Hilbert,1862 –1943) 於 1899 年出版了《幾何學基礎》 一書, 該書被譽爲半形式化公理學的代表作, 同時他也是舉世公認的“現代數學中公理化方法的奠基人”。[7] 他在該書中提出了一個比較完美的初等幾何公理系統, 其中包含6個基本概念 “點”、“直線”、“平面”、“屬於”、“介於”、“合同於” (前3個基本概念一般稱之爲基本元素, 後3個基本概念一般稱之爲基本關係), 以及描繪這6個基本概念之間相互關係的20條基本命題。實際上, 這20條基本命題即是這6個基本概念的隱定義。對於基本命題, 也可稱之爲公理條文。(參見下表)

- 希爾伯特公理系統的結構
  - 基本概念
    - 基本元素
      - 點
      - 直線
      - 平面
    - 基本關係
      - 結合關係: 用“屬於”表示
      - 順序關係: 用“介於”表示
      - 合同關係: 用“合同於”表示
  - 基本命題
    - 結合公理 (I_1—I_8)
    - 順序公理 (II_1—II_4)
    - 合同公理 (III_1—III_5)
    - 平行公理 (IV)
    - 連續公理 (V_1—V_2)

希爾伯特的《幾何學基礎》, 是他一生許多著作中讀者最多的一本書。該書之所以能夠贏得當時數學界的公認, 乃是因爲它的公理系統條數最少、邏輯清晰、結構自然。將其與歐幾里德、巴許、皮阿諾等人的有關著作相比, 唯有希爾伯特的傑作才能給人以和諧而簡單的美感!

二十世紀初期, 公理化方法使得許多新舊數學分支的邏輯基礎得以建立, 並且有可能進一步對各種數學理論統一進行分析與比較。一時間, 許多數學家都在忙於建立新系統, 或者改造舊系統, 這種時髦的活動, 被稱之爲公理化運動, 這對於當時的數學家具有較強的吸引力!希爾伯特曾經評論道:“對於任何嚴正的研究精神來說, 公理化方法都是並且始終是一個合適的不可缺少的助手”。[8]

3.公理化方法的形式化階段

自從希爾伯特的《幾何學基礎》問世以後, 數學公理化方法立即迅速地向著完全形式化方向發展。當然, 可以想像, 如果沒有康托的抽象集合論和數理邏輯的近代發展, 數學公理方法的形式化也不可能獲得新的進展。茹科夫在其所著《數學中的哲學問題》一書中, 曾經指出: 希爾伯特1904年在海德堡召開的第三屆國際數學會議上, 所提交的一篇關於大致描繪證明論的論文, 就是對於形式化公理方法的首次嘗試。[9]

在當時, 由於公理化方法逐步推廣應用於各個數學分支之中, 於是希爾伯特又提出一門新數學, 名叫“證明論”或者“元數學”, 它的研究對象, 是專門處理各個數學分支公理化的和諧性問題。

通常把希爾伯特的主張, 稱爲希氏規劃, 其基本內容如下:

(1) 證明古典數學的每個分支都可以公理化。

(2) 證明每一個這樣的系統都具有完備性 (Semantical completeness), 即任意一個系統內的可表命題, 均可在本系統內。經過有限步驟得到判定爲可證明或不可證明。

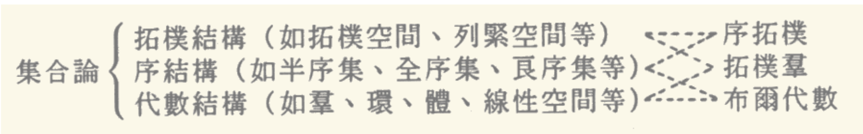
(3) 證明每一個這樣的系統都是和諧的。

概括地說, 數學公理化方法形式化的基本思想, 乃是採用符號語言把一個數學理論的全部命題變成公式的集合, 然後證明這個公式的集合是和諧的。公理化方法的形式化, 不僅推動著數學基礎的研究, 而且還推動著現代算法的研究, 並爲數學應用於電子計算機等現代科學技術開闢了新的前景。然而, 含內容的公理學在一定場合下, 仍然是一種有用的數學方法, 它的功效和作用, 是不可能完全爲形式化公理方法所代替的。歐幾里德的初等幾何公理系統, 在當前的中學數學教學中仍然具有重大參考價值。除此而外, 還應該看到: 希爾伯特想把全部數學都納入於公理化方法形式化的宏偉規劃中去的願望, 已經由奧地利數學家哥德爾 (Gödel) 在1931年發表的“不完全性定理”所表明: 那是永遠不能徹底實現的。[10]

三、結構主義是公理化方法的新發展

1933 年在法國出現一個以布爾巴基 (Bourbaki) (這是法國歷史上一位戰功卓著的將軍) 爲筆名的青年數學家集團, 他們用結構主義觀點, 寫成一本皇皇巨著《數學原本》, 從1939 年到1973年, 已經出版36册, 尙未出完。從本質上來說, 結構主義乃是形式化公理方法在方法論上的新發展, 形式化公理方法是著眼於探討每個數學分支的公理化, 而結構主義則是著眼於探討整個數學大廈的公理化, 他們先從全局上來分析各個數學分支之間的結構差異和內在聯繫, 然後再對每門數學深入分析其基本結構的組成形式。與形式化公理方法相比, 結構主義則是對數學理論的更高一步、更深一層的抽象和概括。這樣做不僅有助於發掘各個數學理論之間的內在親緣關係, 解除數學理論之中的非本質界限, 而且有助於擴大數學理論的應用範圍。

布爾巴基學派提出: 一切數學理論都是集合論的衍伸, 建立在集合論之上的基本結構有三種: 即序結構、代數結構和拓樸結構。這些結構, 統稱之爲母結構。在任何一個母結構中, 再加入幾條補充公理, 就可以得到一些新結構, 這些新結構稱爲子結構。把幾種結構結合起來, 又可以構成複合結構,
例如, 序拓樸是序結構與拓樸結構的有機結合, 布爾代數是代數結構與序結構的有機結合, 拓樸群是拓樸結構與代數結構的有機結合。對於這些結構關係的理論體系, 可以簡單地以下圖表示之:



對於數學的定義, 布爾巴基學派描繪得十分風趣, 他們寫道:“數學好比是一座大城市, 其郊區正在不斷地並且多少有些混亂地向外伸展, 與此同時, 市中心又在時時重建, 每次都是根據構思更加清晰的計劃和更加合理的布局, 在拆毀舊的迷宮式的斷街小巷的同時, 修築新的更直、更寬、更加方便的林蔭大道, 通向四面八方”。現在看來, 布爾巴基學派的工作, 已經深刻地改變了數學的外貌和語言, 他們確實是在數學這個大城市中拆毀了不少“舊的迷宮式的斷街小巷”, 他們所建立的母結構、子結構和複合結構, 亦即是新修的一些“更直、更寬、更加方便的林蔭大道”, 數學家們在這種“林蔭大道”上漫步, 怎不令人陶醉神往!

布爾巴基學派原來設想把數學結構的研究, 從一個分支轉移到另一個分支, 直至數學的一些很僻遠的領域之中。而現在, 他們已不得不放棄對某些數學領域的探討, 這不僅是因爲數學的進展比《數學原本》的編寫更加迅速, 而且是因爲整個數學內容實際上比結構主義者最初的設想要複雜得多!今天看來, 這個學派已很難實現他們的全部計劃。

六十年代, 在歐美各國首先掀起了中小學數學教學內容現代化的改革運動, 在這次改革中所出現的各種新大綱和新教材, 都是在結構主義的嚴重影響下而編寫的。因此, 由這次改革而引起的爭論, 也涉及到一些對於數學公理化方法的評論。七十年代初, 在美國出版的一本評論專著《爲什麼小約翰不會計算—新數學的失敗》, 該書作者指出: 僅僅強調公理方法 ,對於數學的發展是不夠的; 否認直觀, 不僅不可能教好數學, 而且也不可能使數學本身的發展取得本質性的突破。這裡所說的正是數學公理化方法在應用上的局限性。

注釋

1. 《原本》在元朝首次傳入我國, 譯名爲《兀忽列的四擘算法段數十五部》, 後來失傳。1607 年, 徐光啓 (1562–1633) 和意大利傳教士利瑪竇 (Matteo Ricci, 1552 –1610) 合譯《原本》前 6 卷 (這次翻譯是根據德國數學家克拉維斯 (C. Clavius, 1537–1612) 的譯注本, 並非歐幾里德的原著), 將書名定爲《幾何原本》。1857 年 , 由李善蘭 (1811 – 1882) 和偉烈亞力 (Alexander Wylie, 1815–1887) 合譯後 9 卷。該書原名爲希臘文, 英文書名爲“Elements”, 應譯爲《原本》,“幾何”二字是譯者附加的, 其意即“多少”, 而“多少”也就是“算學”的意思。
2. 北京大學編 《古希臘羅馬哲學》,1957 年出版,pp. 293–294。
3. 茹科夫著, 曉爲譯, 黃耀樞校《數學的對象、方法和特徵》《自然科學哲學問題叢刊》1983年3月,p. 3。
4. 從公理學發展的現代水平來看, 公理與公設在含義上已經沒有區別。而且一般地說, 所謂基礎性定義, 實際上即是公理。
5. J. F.斯科特 (Scott) 著, 侯德潤、張蘭譯《數學史》,1981年, 商務印書館出版,p. 37。
6. G. 皮阿諾在 1889 年發表一篇論文, 題目爲 《邏輯地敍述幾何基礎》, 原文爲 “I Principii di geometria logicamente esposti”。到 1899 年, 他的學生 M. 庇愛里又發表一篇這方面的研究論文, 題爲《作爲演繹系統的初等幾何學》, 原文爲“Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo”。
7. P. 希爾頓 (Hilton):《今日數學和科學的教育: 流行著的錯誤“對分法”》, 1976年,《第三屆國際數學教育會議論文集》。

8. M. 克萊因著《古今數學思想》北京大學譯, 上海科學技術出版出版第四册,p. 100。
9. 書名同 [3],p. 4。
10. 維林金等編著, 唐復蘇譯《中學數學現代基礎》,1988 年, 北京師範大學出版社出版,p. 37。
11. 哥德爾這篇論文的題目是《論數學原理及有關系統中的不可判定性命題》, 這個不完備性定理, 後來經由羅塞爾改進爲如下形式: 定理: 如果一個含有自然數理論的形式系統 S 是無矛盾的, 則 S 中存在一個邏輯句式 A, 使得在 S 中 , A 是不能證明的, 同時¬A 也是不能證明的。

—本文作者任教於阜陽師範學院數學系—