丘成桐院士演講：

偏微分方程的方法

時 間：81年5月29日
地 點：國立中央大學數學系
記 錄：鄭宗琳

我今天要用通俗一點的方式來講偏微分方程的方法; 首先, 什麼是偏微分方程呢? 其實微分方程有好幾種, 基本上是由物理上的定律或基本物理到應用時的方程; 有些則來自工程或幾何上; 較靜態者尚有源自數論的。是以不同的學科產生不同的微分方程。

微分方程的來源直接影響方法; 由於微分方程自己的方法可以解決很多物理上的問題, 所以很多物理學家或研究工程方面的人會找數學家來討論微分方程。但是, 有時我們無法單靠自己的想像和抽象的方法來解決那個微分方程的定律所支配的物理 (或幾何) 的現象, 因為微分方程的方法大半和其來源有關, 所以了解物理 (或幾何) 現象有助於解決該微分方程。微分方程的方法無法完全由數學用抽象的方法導出。

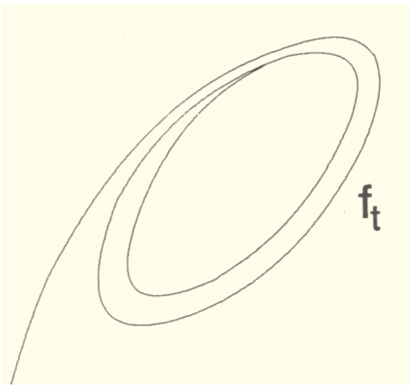
(一) 動態 (dynamics) 和靜態 (statics) 方程

一般而言, 微分方程可分為動態方程和靜態方程。動態方面, 比如說 Navier Stoke's 方程或 Euler 方程, 一般動態方程是很難的問題, 然而我們天天遇到的都是動態問題。我個人對於靜態方面的問題較熟悉, 靜態問題主要在研究有些東西在平衡 (equilibrium) 時的狀況。

動態方程有時間因素在裡頭, 如下列方程 (1):

$$f_t = F(t, f) \tag{1}$$

這方程雖和時間有關, 但只要令 $f_t = 0$, 則可得到一個新的方程, 這是較簡單的設法。有時候, 我們毋須如此做, 可以引進一「極限環」(limit cycle) 的觀念: 設有一個軌道 (orbit), 當 $f_t \neq 0$ 時, 若時間夠長, 這軌道會不停的轉; 如果它慢慢地向某一軌道趨近, 如圖 (a), (1) 變成一個和時間無關的方程, 此方程就機率上而言只和 f 本身有關。吾人可由此極限環得到一個平衡狀態的方程。



(a)

研究動態方程十分有助於了解平衡的狀態, 有時在研究平衡狀態的方程時, 吾人可技巧性地加入時間的因素。舉例而言, 在研究 Laplace 方程 $\triangle u = 0$ 時; 更一般些, 在研究 $\triangle u = \rho$ (即 Poisson 方程) 時, 我們可以有許多解決之道, 但有時可引進「熱方程」(heat equation) $\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u$ 來研究 Laplace 方程, 這使得我們可以了解 u 較整體 (global) 的行爲; 甚至可引進「波動方程」(wave equation) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle u$ 來研究 Laplace 算子本身。在加進 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 這兩個算子之後, 我們獲致一些在微分幾何上意料之外的結果。

比如說, 在古典微分幾何問題中研究一個微分流形 (Differential manifold) 時, 我們很喜歡研究「譜」(Spectrum), 即

$$\triangle u_i = -\lambda_i u_i, \text{ 其中 } \lambda_i \text{ 爲域 (domain) 的譜。} \tag{2}$$

例如打鼓時, 固定其邊, 觀察它振動的方法; 其基本振盪的方法由幾個特定的微分方程所支配。Laplace 方程是在 (2) 中 $\lambda_i = 0$ 的情形。現在研究譜的主要方法基本上是由研究「熱方程」及「波動方程」而來的, 也就是我們不看 (2), 而是看 $\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u$ 的基本解 (Foundamental Solution) 的變化。三十幾年來, 這是我們研究譜主要的工具。當我們研究 $\frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u$ 時, 可觀其擴散過程 (diffusion process), 它和熱傳導 (heat conduction) 基本上是一樣的, 此方程有個很好的基本性質:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \triangle u \\ u(0) = \text{a given function} \end{cases} \tag{3}$$

當t 趨近無窮大時, 試觀察$u(t)$ 的變化。剛開始 (亦即$t = 0$) 有一個很大的跳躍 (jump), 而在 $t > 0$ 時 $u(t) \in C^\infty$, 是一個很光滑 (Smooth) 的函數, 可知 $u(t)$ 的行爲近乎 δ 函數。這個現象 我們可從放一個熱源 (Heat Source) 在某個域 (domain) 中時, 其它地方可立即感受到溫度的變化來了解。

我們再看看其它的方程, 波動方程和 (3) 正好相反:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle u \\ u(0) = \text{given} \end{cases} \text{。} \tag{4}$$

例如我們觀察水波, 點波源觸動水面時, 水波在有限時間之內向外傳播。

若看 poisson 方程 $\triangle \mu = \rho$, 在物理現象中可視 ρ 爲電荷分佈 (charge distribution); 考慮在平面的電荷分佈以發現其位能分佈 (potential distribution) 的平衡狀態的問題, 加時間的因素進去之後得到

$$u_t = \triangle u - \rho \tag{5}$$

或

$$u_{tt} = \triangle u - \rho \tag{6}$$

對於了解電荷分佈在平衡狀態時的問題可以多很多。

回顧方才所談及特徵值 (eigen value) 的問題; 在研究熱方程時, 我們可觀察 λ_i 的漸近行爲。當 i 趨近於無窮時 λ_i 的分佈和該區域 (domain) 的幾何有很大的關係。假如我們做出一個量

$$\textstyle\sum_i e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)\varphi_i(y) = h(t,x,y) \qquad (7)$$

也就是

$$\triangle\varphi_i = -\lambda_i\varphi_i,\ \text{其中 } \lambda_i \text{ 爲特徵值}$$
$$\varphi_i \text{爲特徵函數}$$

而且 $\int_\Omega \varphi_i^2 = 1$, h 爲描述熱傳導的分配函數。

因爲

$$\begin{cases} \triangle_x h = \frac{\partial h}{\partial t} \\ h(0) = \delta_x(y) \end{cases} \qquad (9)$$

由 h 的變化, 得

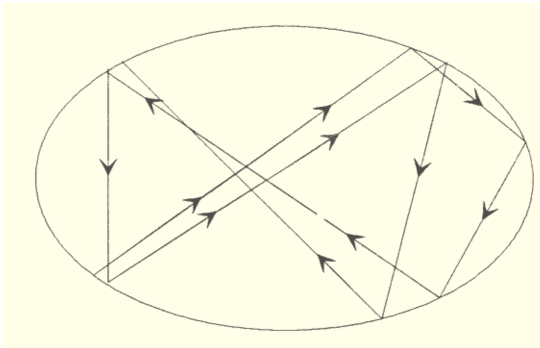
$$\int h(t,x,x)\,dx = \sum e^{-\lambda_i t}。 \qquad (10)$$

令 $t \to \infty$, 亦即解 h 的漸近方程 (asymptotic equation), 則可由 (10) 的左式得出有關幾何的量。

再來我們看波動方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle u$, 它和熱方程正巧是相反的例子。 剛才說 $\sum\limits_i e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)\ \ \varphi_i(y)$ 和熱方程拉上關係, 現在我們可造出另一個新的量 $\sum\limits_i e^{-\sqrt{\lambda_i}t\sqrt{-1}}\varphi_i(x)\varphi_i(y)$ 可得到一個新的核 (Kernel) $w(z,x,y)$, 即

$$\sum e^{-\sqrt{\lambda_i}t\sqrt{-1}}\varphi_i(x)\varphi_i(y) = w(z,x,y)。 \qquad (11)$$

同時我們知道 $e^{i\lambda t} = \cos\lambda t + i\sin\lambda t$ 是一個振動方程, 很明顯的, $\sum e^{-\sqrt{\lambda_i}t\sqrt{-1}}\varphi_i(x)\ \ \varphi_i(y)$ 和特徵值和特徵向量有關, 可是它現在滿足一個波動方程, 由這波動方程所隱函的"有限速傳播" (finite speed propagation) 發現若以剛才作熱方程的方法來求$w(t,x,x)$的軌跡 (trace), 即 $\int w(t,x,x)dx$, 雖 $\int h(t,x,x)\ dx = \sum\limits_i e^{-\lambda_i t}$收斂, 但$\int w(t,x,x)dx$ 卻不收斂, 原因是它存在很多奇點 (Singularities)。例如在某個區域 (domain) 中射一個質點出去, 當此質點碰到邊界時會反彈回來, 如圖 (b):



(b)

有時會形成很多封閉軌道 (closed orbit), 而此軌道之長度和奇點的無窮級數 (infinitely sum) 會有很大的關係, 故吾人可知 $\{\lambda_i\}$ 由這些封閉軌道的長度所決定。其實這是由物理觀點來想的: 波動方程是用來描述一個質點的傳播, 由牛頓力學來看, 若出現一封閉軌道, 則會出現一個特別的性質, 其中此質點會沿著此軌道不停的走, 所以這封閉軌道的長度是一個很特別的量。我們可將這些結果重放到譜的研究上去。

此處要說明的是, 本來我們是要研究橢圓 (elliptic) 方程的平衡狀態, 當我們加入一個動態因素之後可獲致一新的訊息, 這訊息在以前無法單看一個方程就能得到。

我現在想用一些例子來說明最近幾十年來, 用靜態方程在了解動態問題上的重要性。

對於普通的一個方程 $f_t = F(f,t)$, 我們想要去了解 f_t 的漸近行爲。由最近很流行的「混沌理論」(Chaos theory) 可知 這方程中有混沌現象,「混沌」是一個很麻煩的問題, 最近沒有很好的理論, 但對於某種特定的方程, 我們有一些相當漂亮的結果。假設沒有混沌, 我們就想要求此方程之漸近行爲受到適當的控制, 即使有混沌現象, 我們也想在混沌之中找出一定的控制方法來, 亦即在 t 趨近於無窮大時, f_t 可受到一定的控制。若 $f_t \to 0$ 當 $t \to \infty$, 則 f 趨近於一平衡狀態, 例如 $u_t = \triangle u$, 當 $t \to \infty$, $u_t \to 0$, 可得 $\triangle u = 0$, 也就是說當 t 趨近於無窮時, u 趨近於一調和函數。由此可知調和函數直接影響動態方程的漸近行爲之變化, 這觀念在較好控制之下的擴散過程 (diffusion), 常被討論。

我們一般所看到的方程比這複雜的多; 我剛討論的 u 是單一函數 (scalar), 現在要討論的 u 則是一個系統 (system), 亦即 u 爲一向量 (vector) 的情形。在這些方程之中有一些量 (如 $\varepsilon, t, \cdots$ etc), 其導致的漸近行爲有幾種, 如: $t \to \infty$ 或 $\varepsilon \to 0$, 我們想利用一些適當的方法將這些量丟掉。這在近代的物理或數學是一個很重要的課題, 尤其是在非線性方程上。舉例來說, $u_t = \triangle u + F(u)$, 其中 F 是非線性的項 (term); 我們先從方程 $\triangle u + F(u) = 0$ 來看: 假如 F 爲非線性的, 我們並沒有疊加原理 (Superposition principle), 也就是說, 若 u_1, u_2 皆爲方程式的解, 則 $c_1u_1 + c_2u_2$ 不一定爲方程式的解, (c_1, c_2 爲純數)。所以我們希望在 $\triangle u_t = \triangle u + F(u)$ 中, 當 t 趨近無窮時, 非線性的項會消失, 使得疊加原理可以出現。雖然無法適用於每一個方程, 但對於某些特定方程是對的。

就物理觀點而言, 我們可以想像有一堆「不知名」的物質, 當我們從外面打進去一個質點之後, 如果在「無窮遠」處來觀察這複雜的系統, 儘管可能此質點在該堆物質之中時的行爲是非線性的, 但最後當此質點出來之後, 其非線性效應 (nonlinear effect) 會消失掉。所以我們知道一個非線性方程的漸近行爲和線性方程在無窮遠處的疊加原理是有密切關係的。在很多物理現象中, 當我們從無窮遠處觀察時, 疊加原理往往成立。對應在工程或物理上常用的「散射過程」(Scattering process) 是一樣的意思, 當質點打進去一堆物質之中時, 我們無法觀察其細節, 但我們有很多「保守律」(conservation law), 如「動量守恆」、「質量守恆」等; 而這些定律支配著這些質點出來之後的行爲。這使得我們可以在無窮遠處嘗試用一些靜態方程的疊加原理去逼近某些動態方程, 在研究動態方程時這是個很重要的方法。

無論在動態或靜態方程, 我們都必須去了解其背後的物理意義及幾何意義。知道這方程產生的原因之後, 我們才能把我們的想法放進去。若單看這方程, 而忽略其物理或幾

何意義, 很可能會產生一些量, 這些量會使我們越來越遠離事實。

(二) 非線性方程的抽象方法

一般物理上或幾何上的方程都是非線性的; 儘管其基本定律可能是線性的, 但眞正用於自然現象時卻是非線性的, 例如大家熟悉的牛頓運動定律中的 $F = ma$, 雖然基本上是線性的, 但若有幾個粒子交互作用之後, 每兩個粒子之間的交互作用力就存在了一個 $\frac{1}{r^2}$ 的因素 (其中 r 是此二粒子之間的距離), 於是作用力就成了非線性的項了。

對於一個非線性方程, 我們如何用數學的觀念來逼近它? 其實在了解非線性方程時不可避免地要去了解線性方程, 因爲線性方程是一個「基本構造區塊」(Foundamental building block)。我們在探討微分觀念時, 例如在某一點的導數 $\frac{dy}{dx}(x_0)$, 其實它是曲線上某一點切線的斜率, 在研究時我們首先要將曲線線性化 (linearization), 典型的方法是用直線去逼近它。非線性的問題基上是在描述無窮維空間中的一個曲線面 (Curved surface), 如同在微積分所做的一般, 我們需要線性化這方程, 而如何將此線性化方程 (linearized equation) 放在一個適當的「角」來逼近原來的非線性方程是一個很巧妙的問題。所以在微分方程的研究之中, 重要的不在於該方程爲線性或非線性, 而在於如何用線性方程來逼近非線性方程。除了某些較複雜的地方之外, 這過程和我們處理有限維空間的問題時, 基本上是相似的。比如說在二維的情形, 在線性化方程之後, 我們可得到

$$\begin{aligned} &Lv \\ =\ &\sum a_{ij}(u)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + cv \\ =\ &0, \qquad u \text{ 爲未知數} \end{aligned} \tag{12}$$

一般而言, 這些係數 (a_{ij}, b_i, c) 由 u 決定。正如在曲線上作斜率一樣, 在該點之切線斜率端賴這曲線在這點附近的行爲, 所以這線性方程亦決定於 u 的行爲。

下面, 我將用一個例子來強調線性方程之重要。給一個方程

$$F(x, u, \nabla u, \nabla\nabla u) = 0, \tag{13}$$

微分此方程之後得到

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, u, \nabla u, \nabla\nabla u) = 0,$$

我們可以有一個新的線性方程

$$\begin{aligned} &\sum a_{ij}(u)\frac{\partial^2(\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x_i \partial x_j} + \sum b_i(u)\frac{\partial(\frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x_i} + \cdots \\ =\ &0。 \end{aligned} \tag{14}$$

吾人可將 (12) 中的 ν 取爲 $\frac{\partial u}{\partial x}$, 故可得 $L\nu = 0$, 其中係數亦由 u 決定。得出 L 之後, 可用傅立葉 (Fourier) 或拉普拉斯 (Laplace) 的方法來解, 甚至在某些情況下可以直接把解寫出來。問題是寫出來未必有用, 爲什麼呢? 簡單舉例來說, 在二維的情況

$$L\nu = a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \tag{15}$$

如果令 $L\nu = 0$, 在 a, b, c 都是常數的情況, 可以得出很漂亮的解; 然而一般情況, a, b, c 由 u 決定, 也就是說大部分的非線性方程被化簡到一個或一組線性方程時, 係數是在變

動的。我們的工作是要控制 ν (其中 ν 可用 a, b, c 表示出來), 使得其和 a, b, c 的相關度要最小。

在 (15) 中, 若令 $L\nu = 0$, 有時可發現

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可知a, b, c 在某個範圍之內變動, 我們常可由這方程所支配之物理現象之中得出這些範圍。例如光速不可越過 1, 或某個量必需大過 0, 由這些給定的規則之中, 可以發覺這些係數的限制。

當我們從這些特殊的非線性方程之中找出一些特殊的規矩之後, 我們可以由這規矩去了解些線性化方程; 例如可以證明在這些特殊條件之下ν 必須是連續的 (或是 Hölder 連續), 同時可估計此函數之光滑性 (Smoothness)。假設 ν 滿足一定的光滑性, 在剛才的例子之中, 我們令 $\nu = \frac{\partial u}{\partial x}$, 可以了解 u 的一次導數和它本身也有一定的光滑性, 這是一個難得的結果。所以, 假如我們對於線性方程可以有良好的估計, 且其係數的假設可以儘可能的少, 我們對於非線性方程就可以有較好的控制。

剛剛提到的那個微分方程 $F(x, u, \nabla u, \nabla\nabla u) = 0$, 假如我們對它微分一次, 可以知道 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 是一個線性方程的解, 從解之中可以得到一些係數; 這方面的進步主要在橢圓方程上, 出名的是 De Giorgi, Nash, $\cdots$。

這些年在橢圓方程上的進步主要在線性方程的估計和用線性方程來估計非線性方程。在只有一個未知 u 的方程上, 我們可以得到相當圓滿的結果, 然而對 u 是一個系統而言, 因爲在奇異點上的了解不夠, 和前者之了解程度相去甚遠。例如在解 $Lu = 0$ 時, 在單一方程的情況之下, u 基本上是光滑的, 但在系統方程的情況下會有很多奇異點, 故我們無法期待它光滑, 甚至在平衡態下也未必光滑, 例如在物理上產生 “肥皂泡” 或其它的問題, 可以看出這些奇異性 (Singularity), 所以對於奇異性的描述是橢圓方程上主要的問題, 而我們尚未有足夠的理論來描述它。

要了解奇異性有很多方法, 其中有一種叫作縮小或放大 (Scaling) 奇異點, 和最近研究混沌的精神相仿。

結語

我們對於非線性問題的了解不夠清楚, 甚至對於動態線性方程 (dynamic linear equation) 的了解亦不夠。動態方程很明顯地是較複雜的問題, 這是主要的障礙, 雖然從牛頓時代就已開始考慮 Laplace 方程, 然而對動態方程的了解則還差得遠。基本上偏微分方程的方法還有好幾種, 理論上循這幾條路。