談共識

楊照崑

一．前言

在一個人多口雜意見紛云的場合，大家都會覺得只有投票才可以達成共識。「服從多數」總算是一個合理的協調之道, 否則變成了「服從少數」更講不過去了。可能您沒有想到用投票來達成共識並不是一條平坦之路，本文的目的就在於探討用投票來達成共識的問題, 我們先談一件「選舉怪事」。

二．選舉怪事與亞諾定理

設某班有 21 個同學 (若加四個零就可以成爲某區有二十一萬選民) 計劃春假自強活動，有三個地方可去,“綠島”,“澎湖”, 或“阿里山”。我們決定以投票來決定多數人的意向, 一般投票的方式有好幾種, 現舉出最常見的三種方式。

方案一: 各人寫出自己最喜歡去的地方, 最多票者當選。

方案二: 在第一方案中，若沒有一個地方超過半數, 則對二個最高票再投一次, 高票者當選。(這是一個歐美常用的選舉方法, 可以防止大多數人所贊成的政策被多個候選人分散了票數。以該班爲例, 也許多數人樂水而少數人樂山, 但因有二水一山, 因此山可能反而得到較多的票，但多數人可能寧可取水的第二志願而不想爬山(註一))。

方案三: 因爲第一, 第二志願的不同, 採計方法。每人依次寫出三個志願的次序, 第一志願 3分, 第二志願 2分, 第三志願 1分, 積分和最高者當選。

現假定該班各人的志願如表 1 所示。(A,B, C 依次代表綠島, 澎湖與阿里山)

表1 **郊遊意願次序表**

喜　好 ($x > y$ 表示對去 x 高於去 y)	人數
$A > B > C$	5
$B > A > C$	4
$B > C > A$	2
$C > A > B$	10

從表 1 很容易計算出若用方案一, C得最高票，若用方案二，則由 C 與 B 再爭一次，B 在第二次時得勝, 若用方案三計分, 則可算出 A, B, C 之積分分別爲 45, 38, 43。A 當選。沒有想到三種投票方案可得三種不同之結果, 誰說自己是多數都是有理由的。

由此看來, 用投票決定多數, 實與投票方式有關, 那麼我們得先決定投票方式, 其實誰有權決定投票方式, 誰就掌握了何者可以當選。因此我們不能讓班長一人來決定投票方式, 要大家達成共識。如何達成共識, 又得投票不可, 可是投票方案有三種, 與郊遊地點情形相同, 又無法達成共識, 民主之難甚矣哉! 有人會說, 也許上述三種投票方案都不完善, 可能有一種更完善的方法可以選出一個叫人口服心服的得勝者。這是一個難題, 因爲投票方式可以千奇百怪, 就像證明可不可以三等分一角一樣, 不容易下定論。我們如果用 $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, 或 $(1, 1, 0)$ 來代替 $(3, 2, 1)$ 的計分法, 會不會更合理? (註二) 但什麼算合理呢? 我們想爲一個合理的計票方案應滿足下列四個基本原則。

原則一: 各票平等, 與投票人無關。

原則二: 候選人平等, 即在某情形下算 A 當選, 那麼若 B 在同樣的情形下, 應算 B 當選 。

原則三: 若在某種情形下, 我們認爲 $A > B$, 則若有人改變主意, 但都是對 A 有利或不變, 則仍是 $A > B$。(例如有人改原票 $C > A > B$ 成 $A > C > B$ (對 A 有利), 或 $A > B > C > D$ 成 $A > B > D > C$ (對 A 不變), 則不會影響 $A > B$ 之共識。)

原則四: 若在某種情形, 我們認爲 $A > B$, 若有人改變主意但都沒有影響他對 A 與 B 之秩序, 則仍應是 $A > B$。(例如有人改 $A > B > C$ 成 $A > C > B$, 或改 $B > C > A$ 成 $B > A > C$, 其中 A, 與 B 之秩序未改。)

亞諾 (Arrow) 在 1950 年證明若有二個以上的候選人及一個以上的投票人, 則沒有任何一種計票方案可以在任何情形滿足上列四原則。因這四個原則都很淺顯合理, 亞諾定理自然是一個偉大的發現, 一般稱此定理爲亞諾不可能協調定理 (Arrow's Impossibility Theorem(註三))。本定理的證明主要是找到矛盾的例子。雖然加減乘除都不用, 推理仍相當的繁, 有興趣的讀者可在參考資料中找到。但直觀的了解並不困難, 表 1 就可以發現問題的關鍵所在。

在表 1, 如果有人說 A 該當選, 但您會發 現主張 $C > A$ 的有 12 人, 而 $A > C$ 只有 9人。無論如何不能讓 A 壓倒 C。但若要 C 當選, 則主張 $B > C$ 的有 11 人多數, 不好意思說 C 比 B 更受歡迎, 但 B 亦不能當選, 因認爲 $A > B$ 的竟有 15 人之多。想不到按多數原則, $A > B$ 與 $B > C$ 並不等於 $A > C$。轉換律在服從多數上不能成立。因此下次您看到一群腦筋淸楚, 談吐理智的飽學之士爲一件小事不能達成協議, 甚至大打出手, 則不必驚奇。也許在那種情形下, 根本沒有達成協議的可能。若他們連投票方式也達不成協議, 亦不足爲奇。因爲理智推不翻數學的結果, 動口也好動手也好都不能使對方心愉誠服。

數學既推不出一個合理的的投票法, 而又不能不決定一種投票法, 怎麼辦呢? 理智的盡頭只好碰運氣了。就讓抽籤或骰子來決定投票方式吧, 若一個候選人有絕對的優勢,

無論用那種“合理”的投票法, 他都會當選的。否則就讓命運之神來決勝負。至少這樣眞的可以做到勝不驕 (我贏得僥倖), 而敗不餒 (天亡我也, 非戰之罪)。

不過若只有二個候選人, 則亞諾定理並不適用 (原則三, 四均無用武之地), 我們就來談談二個候選人的趣事。

三．神聖一票的價值

若只有 A, B 二個候選人, 則取多數票不會引起爭議。現在問題是值不值去投此一票。因爲多我一票實在是杯水車薪, 濟得甚事? 假定 A 可得 5000 票而 B 可得 5002 票, 相差雖如此之近, 而我的一票卻形同廢票, 其實我的一票只有在 A, B 除我這一外得票相等或差一票時, 才能起作用。爲簡便起見, 假定有 N 個投票者, 我是其中之一, 且 $N-1=2m$ 爲偶數 (註四)。又假定 A 得票之機率爲 p_A, 而 B 爲 $p_B=1-p_A$。因此我的一票能發揮作用的或然率是 A, B 除我之外可以得相同票之時, 此或然率爲

$$p \ = \ \binom{2m}{m} p_A^m (1-p_A)^m。$$

當 m 很大時, 用 Stirling $n! \simeq (2\pi n)^{\frac{1}{2}} e^{-n} n^n$ 的近似法可得

$$p \simeq \frac{2e^{-(N-1)(p_A-p_B)^2/2}}{\sqrt{2\pi(N-1)}}。 \qquad (1)$$

我們很容易看出在 $p_A - p_B$ 不變時, N 愈大則 p 愈小, 而在 N 不變時, $|p_A - p_B|$ 愈大則 p 愈小, 這是合情合理的結果, 因人愈多, 我的一票效果愈小, 而二個候選人可能的票差愈大, 則我一票的影響也愈小。在一般情形下, p_A 與 p_B 我們不知道, 但 N 可以有個底子, 因我們只能說 (在 $|p_A - p_B| = 0$ 的情形)

$$p \ \le \ \sqrt{2}/\sqrt{\pi(N-1)} \qquad (2)$$

設某選區有二十萬人, 則 $p \le 0.0018$, 也就是說平均投五百次票, 最多最多只有一次能發揮作用 (而且要每次都 $p_A - p_B \simeq 0$ 眞是不太可能) 若二年投一次票, 我的一票要有用多半要訴之來生了。若從純經濟觀點來看, 我之所以去投某人 (設爲 A), 因 A 當選會對我 (直接或間接) 比 B 對我的好處要大。設此利益爲 C 元。若去投票, 設我的花費, 包括來回及排除的時間, 車費或鞋底之磨損, 爲 e 元, 因我一票的期望值爲 pc, 因此只有在 $pc > e$ 時才値得去投。若 $e = 10$ 元 (註五), 則 c 中須 $\ge 5,555$ 元。即 A 當選比 B 當選對我有 5,555 元以上的利益, 才值得去投票。當然, 若 A 是我的親朋好友, 可能給我大於 5,555 元的利益 (雖然似乎不道德), 但對一般人而言, 實難有此利潤。尤其是 $p_A \approx p_B$, 兩人能力必定相似難得有如此大的差別。但若兩人實力懸殊, 譬如說 $p_A \ge 0.51$ (還不太算一面倒), 代入 (1) 得 $p \le 10^{-20}$, 從經濟上打算盤, 只有傻瓜才去投票了。不過話說回來, 若大家都是“聰明人”, 則沒有人去投票, 那我就可以一票定江山, 絕對值回投票的辛苦。因此我們投票還得看別人的動向, 式 (1), (2) 中的 N 其實是實際去投票的人, 但根據一般的經驗,“聰明的人”有限, 總有相當多的人去投票, N 不會太小。從經濟的觀點而言, 不投爲上策 (註六)。

既知道了公式 (1), 若又知道 N 很大, $|p_A - p_B|$ 怕不會很小, 若再去投票, 實在像是在做傻事, 對不起數學, 但不去投, 似乎又心裡不安, 我們如何自處? 從公式 (1) 看來, 由於 p 太小, 從 c 無論如何也難使 $pc > e$, 我們必須有一個與誰當選都無關的值, 來使投票合理。令此值爲 d, 則只要 $pc + d - e > 0$ 就値得去投票了, 這個 d 是什麼呢? 那就是去投票本身的價值, 與是不是我支持的人當選無關。顯然的,「以數人頭來代替打破人頭」來轉移政權是人類文明的里程, 支持這個想法的本身就不止十元了。其實民主的眞諦還更甚於「服從多數」與「尊重少數」。梁啓超先生在七十年前談民主, 他認爲民主的大前題在於,「所有團體中的人都關心這個團體」。花精力投票, 可以算是關心的表現。因此要使 $pc + d - e > 0$ 就不會太難。下次若有人再說多投一票有何用, 我們也知道如何用數學來回答他了;

「我去投票並不是爲了誰當選, 而是
關心我們的社會。」

不是很漂亮嗎?

四 . 結尾的話

以往數學用到自然科學上, 像以前的物理化學及現代的計算機科學都有很顯著的成果, 可惜一用到社會科學上, 一個主要的定理就是一個不可能的定理, 人類要學習和平相處, 如何服從“多數”, 如何尊重少數, 還有一段漫長的路要走。不過在亞諾定理中我們也看出數學的偉大, 在數學說不可能的時候, 沒人能有辦法強求可能了。

註釋:

註一: 這種投票方可以防止別人來擾亂陣營, 譬如說我主張聯考, 有 45% 的贊成票, 而我的對手主張各校自行招生有 55% 的票, 我是輸定了。但我若叫兩個朋友也故意去主張自行招生, 他們自然沒有我的對手強, 但他們可以混淆對手的票源。若這兩個人可以合得 10% 以上的票, 用第一種方案我就贏了, 用第二種方案可以防止此弊。

註二: 同時圈選幾個候選人也是常用的一種投票法, 即用 (1,1,0) 法來同時圈選二個候選人。這次二屆國大代表是採取第一種方法, 但因各選區所要選的人數多於一人, 也可以主張各人同時圈選可以代表他的數人, 這樣結果會不一樣, 以表 1爲例, 若我們要取二個地點, 若以方案一, 則 B, C 當選, 但若每人圈二地, 則 A, C 當選。

註三: Arrow's Impossibility Theorem 的條件比我所寫的還要鬆, 一般所用的是把 1。投票者平等換成沒有獨裁者, 即各票不必平等, 但不可以有一個人說什麼就是什麼 (這樣共識就是他的想法, 太容易了)。而第二條也不必那麼嚴, 不必被選者平等, 我可以要求某人只需較少的票即可, 也就是說張三要 2/3 的票才可人當選而李四 1/2 即可, 像某種保障名額, 但必須每個人都有機會當選 (否則他的名字形同廢物)。所以說 Arrow's Impossibility Theorem 的條件是相當寬裕的。

註四: 若 N 爲偶數, 我的一票可以把對方票贏拉成同數票, 其計算在 N 大時幾乎與 N 爲奇數時沒有差別。

註五: 花費因人不同, 不幸的是愈聰明的人, 時間愈寶貴, 因此他的花費也愈大, 坐計程車來回, 一百元是小事。

註六: 若從 Adam Smith 的經濟觀點看來, 我能省錢, 不但對我有利, 而且對整個社會國家也有利, 因爲大家都是一個有效的生產者, 則國富矣。(Adam Smith 即資本主義的始祖, 著有富國論 (The Wealth of Nations))。

參考資料

1. Arrow Impossibilly Theorem 最早發表於 *Journal of Political Economics*, Vol. 58, 328-346, 1950。一些詳細的討論可以在下書中找到。
2. Thompson, J.R. *Empirical Model Building*, Wiley and Sons, 1989。公式 (1) 與 (2) 發表於 Owen, G. and Grofman, B. "To vote or not to vote: The paradox of nonvoting", *Public Choice*, 42, 311-25, 1984。
3. 有關這類的問題可看一本近著 Mueller, D. C. *Public Choice II*, Cambridge University Press, 1989。

—本文作者任教於美國佛羅里達大學統計系—