數學老師欣賞的聯考試題

石厚高

某校兩個學生的對話很有趣, 一個說我們班的數學老師很偉大, 他一出題就全校學生都不及格了, 另一個說我們班的數學老師更偉大, 他一出題就全校數學老師都不及格了。那時教務主任報告學生說的, 數學老師出題一個比一個難。當時還惹起一陣漣漪。

民國五十年大專聯考三萬考生參加, 數學科二萬考生得了零分, 自然組最高分五十八分, 一時輿論大譁交相指責。這份試題讓數學差勁兒差勁兒死差勁兒的學生佔了便宜。他們[進步]了四十二分, 他們很應該感謝這位命題人。更有一年大專聯考數學科全體考生平均也就是所謂的 [低標準] 只有九分, 數學差勁兒的學生更要感謝祖宗保佑了。

今年大專聯考共有 6745 名考生得了零分, 是歷年來最多的一次, 這個數據很讓數學老師興趣濃厚, 作作二份試題就不意外了, 因爲題目很正常, 我不說它很容易, 容易不容易是因人而異的。社會組有 89 名滿分, 自然組有 18 名滿分, 也都是恰如其份。

今年大專聯考數學科試題的題型不論自然組社會組都讓數學老師欣賞, 多爲課本上有或老師講過或校內月考、期考、教師隨堂小考考過的, 學生拿到考題只是寫的時間罷了。我可沒說它是份容易的題目, 容易不容易是因人而異的, 我說它是份正常的題目, 讓正常教學的老師有成就感, 不必把找難題作難題當作教學重點。今年在校生去補習數學的學生要失望了, 這些題目既無[絕招]亦無[技巧]。希望補習班的老師不要生氣, 我絕沒對沒有否定補習班的功能, 否則考不取大學的高中畢業生還有服完兵役要重考的學子怎麼辦呢? 我國補習事業全球獨步, 遠赴美國教美國人如何考[托福] 、GRE, 因爲美國人不懂[補習], 一補習分數馬上就上升, 所以就紛紛來 [中國補習班]補習了, 眞的是中國人之光。

我曾多次平均選取高中六冊數學課本上的例題、習題給學生作複習, 當然數據都作了變更其中沒有難題, 在自己上課的連續二節課裡測驗, 二班學生人數以往最高到一百二十六人, 今年最少二班共九十六人。在一半以上學生都作完畢時才收考卷, 成績是九十分以上的只有個位數字, 不及格的二十位左右, 而平均分數在六十五分左右。對建中學生來說是正常的。這個數據很値得注意, 三年前北部地區以第一志願進建中的學生, 在自己老師命題、題目又都是書上的、考試時間又很充

分的情況下, 對三年所學的數學也只有六成五的認知。道理很簡單, 數學是全世界學生的問題。

二份試題裡唯一的缺點是部分同類型的試題, 社會組試題對社會組學生來說比自然組試題對自然組學生來說要難一些, 因為有微積分的緣故, 當然不會是試題印錯了組別。社會組計算證明題第三題圓曲線10分遠比自然組填充題的第1題的二小格 10分要難拿, 因為前者要求拋物線的焦點而後者要求出橢圓的中心才能繼續往下作, 求橢圓的中心比求拋物線的焦點要容易多了。多項式基本運算裡自然組的填空第2題遠比社會組填空第6題容易, 前者消去最高次項以後最高公因式就自動顯現了, 後者要解一組三元一次聯立方程式。

數學是[投資報酬率]最低的科目, 尤其是升學考試學生最為恐懼, 因為入學考試不是 [自己老師]出題與評分。其實自己老師或非自己老師完全是一樣的, 今年建中應屆畢業生筆者學生呂承翰數學考了97分分發第一志願台大電機系, 他在校成績是 98分, 不論聯考或在校成績都正確反映了他的程度。對數學來說, 習題都是自己作的老師講的都明白, 考試時能保持平常水準的學生, 應該有八十分以上的成績; 不但現在講的都記得, 以前講的也都記得就應該有九十分或更高的成績了。

把今年的二份試題與去年也就是八十一年大專聯考二份數學試題作個比較, 對試題甄試的功能就優劣立現了。去年大專聯考社會組數學試題看來很順眼, 把它作一遍很是佩服, 這是多年來很難得的一次社會組試題, 希望它能給以後聯考命題人一個榜樣, 更希望它能帶動中等數學教育的正常化。整體說來各章節配分都很正常沒有偏廢, 例如與三角有關的佔二十分就很正常, 某年大專聯考不論文理組的數學試題與三角有關的佔了百分之四十五左右, 命題人太偏愛三角, 雖然三角重要, 它不應該佔這麼大的比重。

一般性的題目佔了八十五分左右, 另十五分需要融會貫通、觀念清楚並且各章節要有綜合性的了解, 可以說是高中數學都考到了。這是一次社會組考生有機會拿滿分的試題, 據說以往有過社會組考生數學滿分沒有上榜, 實在遺憾。數學能考滿分不但要後天的努力也是需要些天賦的, 希望教育部救救他們, 這種學生是中華民族的資優青年, 他們不能各科平均發展, 教育部辦資優教育為甚麼忘了他們。

八十一年社會組十二個填空題涵蓋了高中三年的數學教材, 整體說來三角佔二十分的比例正常, 相形之下自然組的微績分只佔十分是少些。這份社會組的試題我十分喜歡, 我作了一遍又仔看了一遍還是很欣賞, 它和八十一年自然組試題的“武功招數”不同, 想必二組不是同一人命題。

八十一年自然組的數學試題就不是很完美。現行的高中數學課本是國立編譯館編定, 其中高三壹年教的是大學裡的微積分、數值方法與矩陣, 其中三上只教微積分, 這一部分的教材並沒有引起太大的爭議; 至於三下的數值方法與矩陣尤其是數值方法很惹起了中學數學教師的物議。這一份自然組的數學

試題高中三年級講了一年的課程只考了十分, 可見命題人也不認爲這些東西是應該拿來教中學生的, 當然這是試題的優點, 可也不能不說是題目的缺點, 下一屆的高三學生都不去注意高三的課程了, 不幸明年七月碰上個索隱行怪的命題人, 把高三的課程出得特別多, 受到傷害的還是學生。遺憾的是這些刁難中學生的章節, 大專聯考可以不考, 老師可就不能不教。所以浪費了學生的時間, 老師是無所謂的, 凡正[一個蘿蔔一個坑] 課表排的時間就要站在那兒講甚麼都一樣。

八十一年自然組試題的九十分都在高一與高二的四册課本裡, 分配不是很平均, 有很多可以考的重要章節都略去了, 尤其是容易的題目與難題間有一道鴻溝, 容易的很容易拿分, 難題又很難拿分。更有要用到令人厭惡的技巧讓人稍有讚嘆。

八十一年五月四日中國時報科學版取材自 Smithsonian 雜誌的一篇文章 [袪除學生對數理的恐懼感], 該文指出專家研究數學、物理、化學曾經是許多人求學時代的夢魘, 直到進入社會工作才算鬆了一口氣, 因爲不懂這些自然學科一樣活得好。可是每當有人提起數學時, 總不免心虛的說數學我是一竅不通的。又談到一項國科會所支持調查的 [各行業所需科學知識]其實非常少; 所以入學試題尤其是數學只要把重點、應該知道的普通知識作評量標準也就夠了, 不必故意出難題整人。這四份試題在評估學生程度至少有三份達到目標。入學試題帶動初、高中的教學是不幸的, 在台灣也是個不爭而又無可奈何的事實, 兩岸學術的交流我們發現大陸的歷史課本比我們的厚得多, 我們的是濃縮本、考試本, 很值得我們三思。

命題不是一件簡單的事, 它是教學經驗與專業知識的結合。就以筆者選取課本習題、例題、變更數據而言, 就不簡單, 因爲有的題目數據一換就不能作, 有的變得很麻煩, 所以要一試再試。(多年來大專聯考數學科試題常爲考生與教師所垢病, 原因單純, 有些命題教授不了解中學教材, 也不了解中學生, 所以不能充分掌握命題重點。) 命題的設計最好能把學生的能力表現得恰如其份, 今年的二份試題頗獲好評, 去年社會組的數學試題也很不錯, 把這四份試題排個名次, 去年社會組試題名列第一, 今年二份試題排名第二, 去年自然組試題實在不能坐第四把交椅, 它和另三份試題的水準差了些。希望以後大專聯考數學試題精益求精, 學子幸甚教師幸甚。

以下是今年兩組考題的重點提示與略解。

八十二年大專聯考自然組數學試題重點提示與略解

選擇題第一大題共有 5 小題, 純爲三角、 平面幾何的基本運算也都是送分題。正$\triangle ABC$ 之內心爲 P, 邊長 100 公尺, P 點直立一旗桿, 自 A 測得旗桿頂之仰角爲 $30°$, 正三角形之內心、外心、重心、垂心四心合一, 故得 $\overline{AP}$ 爲中線長之三分之二。

1. $\overline{AP}=\frac{2}{3}\sqrt{100^2-50^2}=\frac{100}{3}\sqrt{3}$
2. $\overline{TP}=\overline{AP}\tan 30°=\frac{100}{3}$
3. $\overline{AT}=\overline{AP}\sec 30°=\frac{200}{3}$
4. $\overline{QT}=\overline{TP}\csc 60°=\frac{200}{9}\sqrt{3}$

5. $\angle TAP = 30°$, $\angle TQP = 60°$, $\angle TQP = \angle TAP + \angle ATQ$, 所以 $\angle ATQ = 30°$ $\overline{TP} \perp \overline{AP}$ 所以 $\angle PTQ = 30°$, 所以 $\overline{QT}$平分 $\angle ATP$ 故得 $\overline{AQ} : \overline{QP} = \overline{AT} : \overline{TP} = 2:1$

第二大題是立體解析幾何, 平面 $E: x+y+\sqrt{2}z = 1$ 與 x 軸、y 軸、z 軸之交點爲 $A(1,0,0)$、$B(0,1,0)$、$C(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$

6. 平面E之法向量爲1、1、$\sqrt{2}$, 平面xz之法向量爲0、1、0 故得二平面交角之餘弦爲$\cos\theta = \dfrac{1\cdot 0+1\cdot 1+\sqrt{2}\cdot 0}{\sqrt{1+1+2}\sqrt{0+1+0}} = \dfrac{1}{2}$ 得交角爲$\frac{\pi}{3}$

7. 直線 AB 之方向分量爲-1、1、0, 故其方程式爲 $x+y=1$, $z=0$

8. 四面體 $OABC$ 之體積 $= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$

9. 原點 O 至平面 E 之距離爲
$$\frac{|0+0+\sqrt{2}\cdot 0-1|}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2}$$

10. 四面體 $OABC$ 之體積 $= \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{1}{3}\triangle ABC\cdot\frac{1}{2}$, $\triangle ABC = \frac{\sqrt{2}}{2}$

圓錐曲線的研讀先要把橢圓、雙曲線、抛物線的標準式弄清楚, 頂點、焦點的座標要能信手寫出來, 至於非標準式要把它化成標準式, 抛物線找出頂點, 橢圓、雙曲線找出中心 (h,k), 焦點就很容易求了, 例如抛物線由定義著手, 求至定直線與定點等距離之點集合時, 設定直線爲 $x=-a$, 定點即焦點設爲 $(a,0)$, 由定義得 $|x+a| = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$ 化簡即得 $y^2 = 4ax$ 它的頂點在 (0,0) 焦點 $(a,0)$, 非標準式的抛物線化成一樣的形式如 $(y-k)^2 = 4(x-h)$ 它的頂點在 (h,k) 定點 $(a,0)$ 的 x、y座標各平移 h、k 單位 $(h+a,k)$ 就是焦點的座標了。

	標準式	中心	焦點	
橢圓	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(0,0)	$(\pm c,0)$	$0<b<a$
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(0,0)	$(0,\pm c)$	$0<a<b$

故得$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (h,k) $(h\pm c,k)$ $0<b<a$

$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ (h,k) $(h,k\pm c)$ $0<a<b$

填空第1題二橢圓

$\Gamma_1 : \frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4} = \frac{1}{4}\ \cdots$ (1) $\Gamma_2 : 4x^2+3y^2-18y+25=0\ \cdots$ (2)。(1) 與 (2) 消去二次項得 Γ_1 與 Γ_2 二者交點之直線 $L: 4x-3y+6=0\ \cdots$ (3) 化 Γ_2 爲標準式 $\Gamma_2 : \frac{x^2}{3}+\frac{(y-3)^2}{4} = \frac{1}{6}$ 得中心爲 $M(0,3)$

M至L 之距離爲$\dfrac{|4\cdot 0-3\cdot 3+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \dfrac{3}{5}$

填充第2題求二多項式

$$p(x) = x^{50}-2x^2-1$$
$$q(x) = x^{48}-3x^2-4$$

之最高公因式。這種問題的關鍵在於二式的若干倍之和或差仍含二式之公因式。

$$\begin{aligned} p(x)-x^2q(x) &= 3x^4+2x^2-1 \\ &= (3x^2-1)(x^2+1) \end{aligned}$$

$3x^2-1$ 不為 $p(x)$ 或 $q(x)$ 之公因式, 故得最高公因式為 x^2+1

填空第3題排列組合的基本題, 3球投入3個不同的袋子裡共有 $3^3=27$ 法, 3 球排成一列共有 $3!=6$ 法, 所以每個袋子都有球的機率為 $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$。3 球同在一袋之情形共有三種, 所以三球都在一袋之機率為 $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

列　表

空袋數	0	1	2
機率	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$	$\frac{1}{9}$

故得空袋子個數的期望值為 $0\cdot\frac{2}{9}+1\cdot\frac{6}{9}+2\cdot\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

填空第4題矩陣基本運算, 設 $A^{-1}=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$ 得 $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}p+2r&q+2s\\3p+4r&3q+4s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

故得
$$\begin{aligned}p+2r=1\quad& q+2s=0\\3p+4r=0\quad& 3q+4s=1\end{aligned}$$

解之得 $p=-2$, $q=1$, $r=\frac{3}{2}$, $s=-\frac{1}{2}$ 故得 $A^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 由題設 $AB=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ 故得 $B=2A^{-1}=\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ $a=-4$, $b=2$, $c=3$, $d=-1$ 故得 $a^2+b^2+c^2+d^2=30$ 填空第5題求旋轉體體積用了微積分, 純代公式 $\pi\int_2^{20}(f(x))^2dx$

$$\pi\int_2^{20}(1+\frac{x^2}{100})=\frac{10449\pi}{25}$$

設球半徑為 r 則 $\frac{10449\pi}{25}=\frac{4\pi}{3}r^3$ 故得 $r=\sqrt[3]{\frac{31347}{100}}$。

計算證明第二題結合了對數與不等式

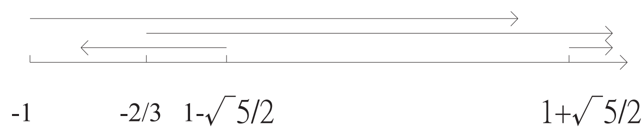
$x+1>0$ 得 $x>-1\cdots(1)$ 又 $x^2-x-1>0$

$$\text{所以}x>\frac{+\sqrt{5}}{2}\text{ 或 }x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}\qquad(2)$$

$$\log_{1.5}(x+1)>\log_{2.25}(x^2-x-1)$$
$$\log_{2.25}(x+1)^2>\log_{2.25}(x^2-x-1)$$

$$(x+1)^2>x^2-x-1\quad 3x>-2\quad x>\frac{-2}{3}\qquad(3)$$

由 (1)、(2)、(3) 畫出數線圖



故得 $x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $-\frac{2}{3}<x<\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

計算證明第三題結合了圓錐曲線與微積分, 設拋物線 Γ 之方程式為 $f(x)=ax^2+bx+c$ 按題意 Γ 過 (2,0) 與 (1,2) 二點

故得 $f(2)=4a+2b+c=0$

$f(1)=a+b+c=2$

又 $f'(1)=2a+b=p'(1)=4\cdot1^2+1=5$

解得　$a=-6\quad b=16\quad c=-8$

所以 $p(x)=-6x^2+16x-8$

計算證明第四題是數列與極限, 由題設

$$a_0=1,\ a_{n+1}=\sqrt{1+a_n},\quad n=0,1,2,3,\cdots$$

(1) 故得 $a_0\geq1$ 令 $a_k\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$a_{k+1}=\sqrt{1+a_k}\leq\sqrt{1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$
$$=\sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

故得 $a_{k+1}\leq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 由數學歸納法可知原式於 $n=0,1,2,3,\cdots$ 恆成立。

(2) $a^2{}_{n+1} - a^2{}_n = 1 + a_n - a^2{}_n = -(a_n - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} \geq -(1-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = 0$ 所以 $a_{n+1}^2 \geq a_n^2$ 所以 $a_{n+1} \geq a_n$

(3) 因 a_n 遞增且有上界, 故知數列 $\{a_n\}_n$ 收斂。

八十二年大專聯考社會組數學試題重點提示與略解

選擇題第1題先求出所予圓之圓心 (-1,2), 聯心線長減去半徑就是相切二圓中較小圓的半徑了 $\sqrt{(9+1)^2+(7-2)^2}-2\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

選擇題第2題是對數基本運算, 原式 $= 2x+2\log_{10}(2+10^{-x})-\log_{10}(\frac{1}{2}+10^x)^2 = 2x+2\log_{10}\dfrac{2+10^{-x}}{\frac{1}{2}+10^x} = 2x+2\log_{10}(2\cdot 10^{-x}) = 2\log_{10}2$。這一題最大的敗筆在於有些取巧的考生令 $x=0$ 代入即得以上答案。

選擇題第3題利用等比級數求和公式

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{(1-x)[1-(1-x)^n]}{1-(1-x)} \\ &= \frac{1-x-(1-x)^{n+1}}{x}\end{aligned}$$

所以 x^2 項之係數就是 $-(1-x)^{n+1}$ 展開式裡 x^3 項之係數, 這個係數是 $C(n+1,3) = \dfrac{n(n+1)(n-1)}{6} = \dfrac{n^3}{6} - \dfrac{n}{6}$ 故得 $a=\frac{1}{6}$, $b=0$, $c=-\frac{1}{6}$, $d=0$

選擇第4題只要把[4好]與[3好1壞]的情況除去就行了, 列式如下

$$1-\frac{C(7,4)}{C(12,4)}-\frac{C(5,1)\cdot C(7,3)}{C(2,4)}=\frac{19}{33}$$

填空第1題考生要知道 a 與 465 的最大公因數就是 465與 30的最大公因數, 故得 $(a,465)=(465,30)=15$; 沒有想到這一點就寫下 495, 960, 1425 $\cdots$ 所以 (1425, 465)=15。這二點都沒想到就只好放棄了。

填空第2題綜合了三角基本運算與二次方程式的根與係數的關係, 由根與係數的關係可得 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{p}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=\frac{q}{2}$,

又由假設 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 故得

$$\begin{aligned}p^2-8q &= 4(\sin\theta+\cos\theta)^2-16\sin\theta\cos\theta \\ &= 4(\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

填空第3題由假設可知 $-2\leq a\leq 0$ 且

$$a^2+|a|+3k=0,\quad (a+2)^2+|a+2|+3k=0$$

故得 $a^2+|a|=(a+2)^2+|a+2|$

$$a^2-a=a^2+4a+4+a+2$$

$\Rightarrow a=-1$ 代入 $a^2+|a|+3k=0$ 得 $k=-\frac{2}{3}$

有些考生答案爲 $-\frac{1}{3}$, 因爲他們求出 $a=-1$ 再求出 $a+2=1$ 所以 $1(-1)=3k$ 得 k 值爲 $-\frac{1}{3}$, 他們不小心 誤以爲 a 與 $a+2$ 同爲二次方程式 $x^2+x+3k=0$ 之二根, 題目是規定 a 與 $a+2$ 均爲方程式 $x^2+|x|+3k=0$ 的解, 所以作錯了。

填空第4題最單純, 三向量的行列式值就是所張平行六面體的體積, 答案是 18。有些坊間參考書在行列式前有 $\frac{1}{2}$, 或 $\frac{1}{3}$ 是指三向量所張三角柱或三角錐的體積, 所以考生弄混淆就作錯了。

填空第5題重點在於 $\frac{\pi}{3}$、$\frac{2\pi}{3}$ 的正餘弦函數值以及 $\sin(\alpha\pm\beta)$、$\cos(\alpha\pm\beta)$ 的兩個公式或直接利用差化積之公式, 就很容易得到解, 它是三角基本運算, 也是送分題。

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2\cos\frac{\pi}{3}\cos x + 2\sin\frac{\pi}{3}\sin x \\
&\quad -2\cos x - 3 \\
&= -\cos x + \sqrt{3}\sin x - 3 \\
&= 2(\cos x\cos\frac{2\pi}{3} + \sin x\sin\frac{2\pi}{3}) - 3 \\
&= 2\cos(x - \frac{2\pi}{3}) - 3
\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
f(x) &= -4\sin\frac{\pi}{6}\sin(\frac{\pi}{6} - x) - 3 \\
&= -2\sin(\frac{\pi}{6} - x) - 3 \\
&= 2\sin(x - \frac{\pi}{6}) - 3 \\
&= 2\cos(\frac{\pi}{2} - x + \frac{\pi}{6}) - 3 \\
&= 2\cos(\frac{2\pi}{3} - x) - 3
\end{aligned}$$

故得 $M = 2 - 3 = -1$

填空第6題是多項式的基本運算, 利用被除式=除式·商式+ 餘式 按題意 $h(x) = (x^2-1)A(x)+3x+4 = x(x^2-1)B(x)+px^2+qx+r$

$$\begin{aligned}
h(0) = 0 = r \qquad & (1) \\
h(1) = 7 = p+1+r \qquad & (2) \\
h(-1) = 1 = p-q+r \qquad & (3)
\end{aligned}$$

解 (1)、(2)、(3) 得 $p = 4$, $q = 3$, $r = 0$, $p^2 - q^2 + r^2 = 7$

填空第7題是線性規畫基本題, 先求出滿足所設條件的四邊形區域, 四個頂點是$A(0,0)$、$B(0,3)$、$C(1,0)$、$D(\frac{4}{13},\frac{36}{16})$, 四個能產生極值的端點代入 $x+2y$ 得 6 爲極大值。也有考生令 $x+2y=k$, k 由 0 逐漸增大, 這個直線系平行掃過 $ABCD$ 的四邊形區域時最後接觸的一點是 B, 可是圖形沒有畫的很正確, 就誤以爲 D 是最後一點, 所以得答案爲 $\frac{76}{13}$。B 與 D 二點很接近, 用這種方式作時要小心。

填空第8題的排列組合是普通又普通的題目, 3男4女排成一列, 男生要排在一起, 女生也要排在一起, 把3男看作一人4女也看作一人, 所以是 $3!4!$, 可是男生女生可以交換, 要再乘以2, 所以是 $3!4!\cdot 2 = 288$。只要男生排在一起時, 男生4人看作一人與女生3人共4人排成一列是4!, 而男生4 人又有4!種排法所以是 $4!4! = 576$

計算題第二題是不等式, 要用到定理

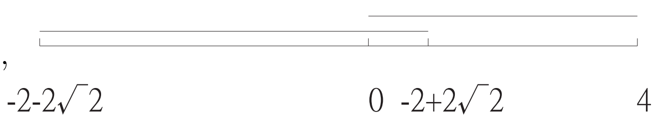
設 a、b、$c \in R$, 若 $ax^2+bx+c>0$ 對任意 $x \in R$, 恆成立則 $b^2-4ac<0$ 這個定理大專聯考考過很多次, 可惜很多考生都誤以爲 $b^2-4ac>0$, 答案就錯得離譜了。由所予不等式可化爲以下二不等式

$$x^2+ax+(1-a)>0 \quad 與 \quad x^2-ax+a>0$$

故得 $a^2-4(1-a)<0$ 與 $a^2-4a<0$

即 $-2-2\sqrt{2}<a<-2+2\sqrt{2}$ 與 $0<a<4$

畫畫數線



得交集爲 $0 < a < -2+2\sqrt{2}$

計算題第三題過二抛物線

$\Gamma_1 : 2y-3x^2+12x-14=0 \cdots (1)$ $\Gamma_2 : y+x^2-2x-1=0 \cdots (2)$ 交點之直線爲 L, (1)+3(2) 得 L 之方程式爲 $6x+5y-17=0$

	標準式	頂點	焦點
抛物線	$y^2=4ax$	(0,0)	(a,0)
	$x^2=4ay$	(0,0)	(0,a)

故得 $(y-k)^2=4(x-h)$ (h,k) $(h+a,k)$

$(x-h)^2=4(y-k)$ (h,k) $(h,k+$

1) 化 Γ_1 爲標準式 $\Gamma_1 : (x-2)^2 = 4\cdot\frac{1}{6}(y-1)$ 得頂點 (2,1)

故得焦點 $F(2,1+\frac{1}{6})$ 即 $F(2,\frac{7}{6})$

F 至 L 之距離爲 $\dfrac{|6\cdot 2+5\cdot\frac{7}{6}-17|}{\sqrt{6^2+5^2}} = \dfrac{5}{6\sqrt{61}}$