簡介圖形著色問題

陳伯亮

圖形著色的問題裡最爲人所津津樂道的, 莫過於“四色問題”; 四色問題 是在 1852 年由 F. Guthrie 所提出, 一直到 1976 年才由 K. Appel 和 W. Haken 兩位數學家合力解決。以往的數學問題其證明方式都是透過嚴密的邏輯推論, 找出重要而關鍵的性質再給予適當的證明。但四色問題的證明過程, 卻是由數理邏輯歸納出一些性質, 而留下來尚未解決的部份, 卻是透過電子計算機經過長時間且繁雜的計算所得到的證明, 令人只看到結果而不明所以然, 因而在數學界引起軒然大波。其中有人質疑這個四色問題證明的正確性, 因爲要驗證他們的證明是無誤, 得花上好幾年的光陰; 也有人根本不承認四色問題被解決了。到目前爲止, 大部份數學界人士都對四色問題已解決的這個結果尙能接受, 但絕不滿意。而一致認爲四色問題仍有再研究的必要與價值。

圖形著色有那些方式呢? 有對頂點給予塗色的點著色(vertex coloring); 有對頂點塗色並要求每個顏色最多只塗 m 個頂點的有限制點著色(m-bounded coloring); 也有不僅要求點著色, 更要求每個顏色所塗的頂點數要很平均的均等著色(equitable coloring); 有對邊塗顏色的邊著色(edge coloring); 甚而有對頂點及邊一起塗顏色的全著色(total coloring); 有爲了解決頻道分配問題, 而考慮的 T 著色(T-coloring) 等等$\cdots$。此外, 尙有許多爲了解決特定的實際問題, 而考慮的特殊著色方式。

一. 點著色

一個圖形的點著色, 乃是在圖形的每個頂點塗上一個顏色, 但要滿足下面的限制: 兩個頂點若有邊連接則需塗不同的顏色。給定一個圖形, 最簡單明瞭的點著色就是每個頂點都塗不同的顏色。但這種著色方式也太單純了, 因爲每個圖形都用與頂點數相同的顏色去著色即可, 以致於失去了研究意義。若一個圖形有一種塗 k 個顏色的點著色, 且 k 小於其頂點個數(order), 則必有某顏色塗兩個頂點或兩個以上頂點, 則將其中一個頂點改塗另一種新的顏色, 即可獲得一個塗 $k+1$ 個顏色的點著色。歸納以上的現象, 則我們可看出兩件事實: 第一件, 每個圖形一定有一種點著色。第二件, 一個圖形的點著色所使用的顏色數只要比最少顏色數大即可。因而我們知道每一圖形都有點著色, 所需研究的是如

何著色可得最少顏色數的點著色, 而它的最少顏色數是多少?

若圖形 G 有一種點著色, 而其使用的顏色數小於或等於 k, 則稱圖形 G 是可 k-著色(k-colorable)。是以圖形 G 是可 k-著色, 則必也是可 $(k+1)$-著色。我們再定義一個圖形 G 的點著色數(chromatic number), $\chi(G)$, 爲圖形 G 的點著色中最少需使用的顏色數。因此圖形 G 是可 k-著色的充要條件是 $k \geq \chi(G)$。

"四色問題"也就是問說是否每一個平面圖形 (planar graph) 的點著色數都不會超過4? (有關四色問題更詳盡的敍述與探討可見參考資料一及二。) 光是一個四色問題, 也就是一個求平面圖形的點著色數問題, 就花了一百二十四年的時間, 而所得到的成果, 卻是只知答案卻不知其所以然; 而平面圖形只不過是衆多圖形裡的一小支而已。對任意圖形求其點著色數的困難度, 相信大家都有相當程度的瞭解。決定一個圖形的點著色數是否小於或等於 3 這個問題早在 1976 年即已證明是 NP-complete (請見參考資料四)。而筆者個人則相信要決定任意圖形的著色數這個問題的困難度爲人力所不能及, 數學家唯有對一些自然界比較感興趣的幾類圖形多作些努力而已。

若一個圖形 G 是可 k-著色, 則 G 的任意子圖形 (subgraph) 也是可 k-著色。這個簡單的概念我們不另外證明了。在一般圖形中無法求得其正確點著色數時, 是否有適當的上、下界, 來約束其點著色數的可能範圍呢? 這個問題相當重要。讓我們先定義圖形 G 的完全數 (clique number), $\omega(G)$, 爲該圖形最多擁有多少個兩兩有邊連接的頂點個數。

性質1: 給一個圖形 G, 則有 $\chi(G) \geq \omega(G)$。

證明: 因爲在圖形 G 中有 $\omega(G)$ 個頂點兩兩有邊相連, 那麼這些頂點都需塗不同的顏色, 則圖形 G 的點著色數就大於或等於圖形 G 的完全數。

由上面這個性質, 我們得到圖形的完全數爲其點著色數的一個下限。讓我們看看兩個特殊圖形的點著色數。一個 n 個頂點的完全圖形 (complete graph) 的點著色數是該圖形的點數, 也是該圖形的最大度數 (maximal degree) 加一。我們稱一個長度爲奇數的迴圈爲奇迴圈(odd cycle), 則奇迴圈的點著色數是等於 3, 也是該圖形的最大度數加一。1941 年 R.L. Brooks 證明除了完全圖形及奇迴圈以外的連通圖形(connected graph) 的點著色數必小於或等於其最大度數。

定理2: 一個連通圖形若不是完全圖形, 也不是奇迴圈, 則點著色數必小於或等於最大度數。

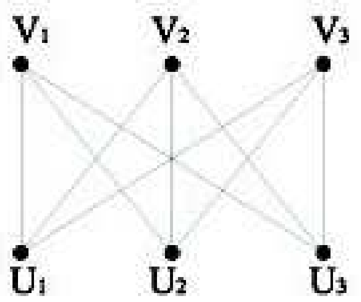
一般稱定理2 爲 Brook's 定理, 見參考資料五。這個定理的證明在一般的圖形學參考書裡都可看到其證明。綜合性質1與定理2, 可知一個圖形若不是完全圖形, 也不是奇迴圈, 則其點著色數大於或等於其完全數, 也小於或等於其最大度數。除此之外仍有許多

零星結果, 我們無法一一列出。有興趣的讀者可參考一般基礎的圖形學書籍。

二. 均等著色

一個圖形的均等著色是一種特殊的點著色, 要求任意兩個顏色所塗的頂點個數最多只差一個。我們稱一個圖形是可均等 k-著色(equitably k-colorable) 是指該圖形有一種所使用的顏色數剛好等於 k 的均等著色。由定義知若一個頂點數爲 n 的圖形 G 可均等 k-著色, 則每個顏色所塗的頂點數將介於 $\lfloor\frac{n}{k}\rfloor$ 到 $\lceil\frac{n}{k}\rceil$ 之間 ($\lfloor\frac{n}{k}\rfloor$ 是比 $\frac{n}{k}$ 小或等於的最大整數, 而 $\lceil\frac{n}{k}\rceil$ 則是比 $\frac{n}{k}$ 大或等於的最小整數。) 是否任意一個圖形都可以均等著色? 如果圖形中每個頂點都塗不同顏色, 則這種點著色將也是均等著色。所以一個頂點數爲 n 的圖形, 是一個可均等 n-著色的圖形。而"均等著色"與"點著色"最大的差異在於一個圖形是可 k-著色則必然也是可 $(k+1)$-著色; 但一個圖形是可均等 k-著色, 卻未必是可均等 $(k+1)$-著色。以 $K_{3,3}$ 爲例子說明如下:

$K_{3,3}$:



圖形 $K_{3,3}$ 是可均等 2-著色, 但卻不可均等 3-著色。因爲將 v_1, v_2 及 v_3 都塗紅色, 而 u_1, u_2 及 u_3 都塗黑色, 則這種塗色方法就是一種均等 2-著色; 而 $K_{3,3}$ 若是可均等 3-著色, 則是塗三個顏色, 每個顏色塗兩個頂點, 則必有一個顏色塗 v_i 及 u_j 兩頂點, 但 v_i 與 u_j 有邊連接, 這就不是一個均等著色, 也就是說 $K_{3,3}$ 不可以均等 3-著色。所以上面的例子告訴我們"若圖形 G 是可均等 k-著色, 並不代表 G 是可均等 $(k+1)$-著色。"由上面的性質看來, 圖形的均等著色中使用的最少顏色數, 不能完全決定圖形是否可均等 k-著色, 但我們仍渴望知道圖形的均等著色中至少需使用多少顏色數。在這裡我們定義一個圖形 G 的均等著色數 (equitable chromatic number), $\chi_=(G)$, 爲圖形 G 的均等著色中最少需使用的顏色數。例如: $\chi_=(K_{3,3})=2$。

對一個特定的圖形 G 及一個正整數 k, 決定 G 是否可均等 k-著色是一個重要的研究題材。在文獻中曾載明 K_n 是可均等 k-著色的充要條件是 $k \geq n$, 以外就無資料可查了。中央研究院數學所李國偉教授, 吳寶林先生及筆者最近的研究成果已能完全決定樹 (tree) 及均勻完全二分圖 $K_{n,n}$ 可均等 k-著色的充要條件 (見參考資料四、五)。對一般圖形的均等著色研究則有 A. Hajnal 和 E. Szemeredi 下面的結果 (1970):

定理3: 任意的圖形 G, 可以均等 k-著色, 只要 k 大於 G 的最大度數。

我們與定理2 做比較, 發現其中完全圖形、奇迴圈和均勻完全二分圖 $K_{n,n}$ (n 是奇數) 都無法得到最大度數的均等著色。綜合上述資料, 我們提出了下述猜想:

猜想: 不為 K_n, C_{2n+1} 及 $K_{2n+1,2n+1}$ 的連通圖形 G 必可均等 $\triangle$-著色, 式中 $\triangle$ 為 G 的最大度數。

我們已就這個猜想得到些成果, 但尚不足以證明這個猜想是對的。

均等著色是一個有趣的問題, 它在點著色的要求之外, 又要求每個顏色所塗的頂點數要很平均。這個額外的條件使得整個問題的困難度提高了很多。關於"均等著色"的研究仍有待維續下去。

三. 邊著色

一個圖形的邊著色就是在每個邊塗上一種顏色但要滿足下列條件, 相連 (adjacent) 的兩個邊必需塗不同的顏色。事實上邊著色與點著色有很多相同的性質, 例如: 每個圖形至少有一種邊著色, 就是每邊都塗不同的顏色; 一個圖形如 有一種使用 k 個顏 色的邊著色, 那就有使用 $k+1$ 個顏色的邊著色。因而我們有興趣知道的是如何使用最少的顏色去對一個圖形進行邊著色? 最少的顏色數是多少呢? 因而我們定義一個圖形 G 的邊著色數 (chromatic index), $\chi'(G)$, 為圖形 G 的邊著色中所需使用的最少顏色數。

讓我們先看看完全圖形 K_n 的邊著色數 $\chi'(K_n)$ 為多少?

性質4:

$$\chi'(K_n)=\begin{cases} n-1 & \text{如 } n \text{ 是偶數,} \\ n & \text{如 } n \text{ 是奇數。} \end{cases}$$

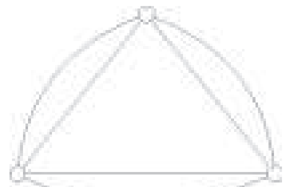
由性質4 可知完全圖形的邊著色數有兩種可能; 第一種是邊著色數等於頂點個數減一, 也等於其最大度數; 第二種是邊著色數等於頂點個數, 也等於其最大度數加一。且讓我們看看是否每一個圖形的邊著色數為其最大度數或最大度數加一這兩種可能而已? 在討論這個大膽的假設是否成立之前, 且先讓我們看一個簡單性質:

定理5: 一個圖形的邊著色數必大於或等於該圖形的最大度數。

證明: 若圖形 G 的最大度數為 n, 則有一個頂點 v 使得 v 的度數為 n, 也就是說有 n 個邊連到頂點 v; 根據邊著色的定義, 則這 n 個邊必需塗不同的顏色, 也就是這個圖形的邊著色數至少要 n 個顏色。

性質5 顯示只要能證明: 一個圖形的邊著色數小於或等於最大度數加一; 則我們原先的觀察成立。而事實上這個觀察並不完全對, 且讓我們看看下面的例子:

G :



$\chi'(G)=6>\triangle(G)+1$

上面的例子告訴我們原先的假設並不正確, 應做一些修正。一個圖形稱為簡單圖形 (simple graph) 當其任意兩個頂點最多只有一邊相連接, 也沒有任何一邊只接在一個頂點上。V.G. Vizing 在 1964 年證得下面這個定理。

定理6: 任意簡單圖形的邊著色數小於或等於該圖形的最大度數加一。

這個定理告訴我們: 任何一個簡單圖形的邊著色數不是最大度數, 就是最大度數加一。定理6 的重要性, 不言可喻。於是大家爲了尊崇 V.G. Vizing 證明了這個定理, 而將這個定理稱爲 Vizing 定理。由 Vizing 定理, 我們可將簡單圖形分爲兩類: 如果簡單圖形 G 的邊著色數等於最大度數, 則稱 G 爲第一類(class one) 圖形; 倘若其邊著色數等於該圖形的最大度數加一, 則稱 G 爲第二類(class two) 圖形。讓我們先看一下兩分圖 (bipartite graph), 是屬何類? 事實上, 從結婚定理 (Marriage Theorem) 即可得下面的定理

定理7: 所有的二分圖都是第一類圖形。

結婚定理是由 P. Hall 在 1935 年首先發現 (可見參考資料三)。實際上, 絕大部份的圖形都是第一類圖形。但要決定一個圖形是否爲第一類圖形也是一個 NP-complete 的問題。“邊著色問題”看似比“點著色”問題來的簡單, 然而有很多類的圖形已可求得其點著色數但卻仍不知其邊著色數。

参考資料

一、曹亮吉, 淺談四色問題, 數學傳播, 1卷4期 (66年3月), pp 14-27。

二、林克瀛譯, 四色問題的解決, 數學傳播, 5卷4期 (70年12月), pp 16-28。

三、王子俠, 相異代表系統簡介, 數學傳播, 4卷4期 (69年12月), pp 8-12。

四、李國偉和吳寶林, On equitable Coloring of bipartite graphs. Discrete Math., to appear.

五、陳伯亮和李國偉, Equitable Coloring of trees. J. Combin. Theory, Ser. B, to appear.

六、M. R. Garey, D. S. Johnson and L. Stockmeyer [1976], Some simplified NP-complete graph problems, Theor. Comput. Sci. 1, 237-267。

七、R.L. Brooks, On colouring the nodes of a network, Proc. Cambridge Phil. Soc., 37 (1941), 194-197。

八、A. Hajnal and E. Szemeredi, Proof of conjecture of Erdös, in: P. Erdös, A Renyi, and V.T. Sos eds, Combinatorial Theory and its Applications, Vol. II, Colloq. Math Soc. Janos Bolyai 4, (North-Holland, Amsterdam, 1970) 601-603。

—本文作者任教於東海大學數學系—