孤立波(Soliton) 淺談

林琦焜

「Yang-Mills方程式是非線性的, 因此不可能得其精確解(exact solution)。」

這樣的敍述似乎是極具說服力, 尤其對一個曾經修過常微分方程的人而言。如果諸位還有印象的話, 當不難憶起這樣的經驗。

“通常只有在線性常係數微分方程, 才可得其一般解 (general solution)”。

這論述當然是對的, 但不要忘了, 誠如生命的歷程一般, 許多時候, “特例”、“例外”, 反而較常規來得有意思。其中相散波 (dispersive wave) 就是這樣一個例子。

首先我們解釋一下“相散 (dispersion)”是什麼? 在水中, 不同頻率的波以不同的速度前進, 因爲沒有什麼東西可以把這些不同的頻率一把抓在一起, 因此基本上, 複雜的波形會一路改變其形狀; 它的波峰漸漸達到最高點, 然後超越波的主體。波浪會碎成較小的擾動, 最終則變爲一團紊流 (turbulence)。此現象我們稱之爲相散(dispersion)。

要談孤立子(soliton); 任何的描寫都遠不及最初見證者的聲音, 來得那麼眞實與直接。那是遠在150年前即1834年8月的某一天, 蘇格蘭造船工程師 John. Scott Russell, 是日沿著愛丁堡的聯合運河策馬前進, 突然間:

「我正觀察一艘小船由兩匹馬沿著狹窄水道的兩側拉著, 快速前進。此時, 船突然停止, 然而船欲靜而水不止。小船在水道中所排開的水。沿著船首聚集經過一陣狂亂之後, 突然離小船而往前邁進, 其外型看似一巨大的突起物, 圓滾滾, 平滑又形狀分明的水峰。它持續地沿著水道前行, 而且其外形與速度並無明顯地改變。我騎著馬追逐它, 當超越它時, 水峰仍以時速8到10哩的速度翻騰前進, 且保持著它起初的形狀, 大約是30呎長1.5呎高。然後其高度漸漸降低。再追了1-2哩後, 它在蜿蜒的水道中消失。」

實際上, Russell 發現這種不尋常的波, 爲什麼不尋常呢? 主要是這種波浪在行進的途中, 保持穩定的速度和形狀, 它不會散裂成水面上漂動的浮沫, 也不會分流成許多更小的波, 不會失去其能量, 而只是向前奔流。今目我們稱之爲“孤立子”(Soliton, solitary wave), 它讓 Russell 終其一生著迷且投入, 後來也成爲他對船體龍骨革命性設計的重要根據。

註: (*) Soliton 亦可稱“孤立波”。因有粒子行爲, 所以被取名-ton, -ton是用在粒子之語根。

在 Russell 去世十年後, 荷蘭數學家 D. J. Korteweg 和 G. deVries二人在推導淺水波方程 (shallow water wave) 的過程中, 僅考慮相散 (dispersion) 而忽略能量的消散 (dissipation) 而得著名的 KdV 方程

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases} t: & \text{時間變數} \\ x: & \text{空間座標} \end{cases}$$

KdV方程是一非線性偏微分方程, 因此要求得其解, 並不是件輕省容易的事, 由其歷史發展吾人可見, 事實上是艱辛的過程, 這姑且不談, 對任一個未知的非線性偏微分方程。我們總是可以先看看它的行徑波 (travelling wave) 解。所謂的行徑波即是解的形態如下。

$$u(x,t) = f(\xi), \qquad \xi = x - ct \tag{2}$$

其意義就是“隨波逐流”, 即變換爲以速度爲 c 前進的座標系統, $\xi = x - ct$, 在這變換下, 波看起來似乎是不動的。底下我們將看到經過這變換, KdV方程將變爲一常微分方程。事實上, 將 (2) 代入 (1) 得

$$-cf' + ff' + f''' = 0 \tag{3}$$

積分一次之後

$$-cf + \frac{1}{2}f^2 + f'' = A \tag{4}$$

其中 A 爲任意常數。將f'視爲積分因子

$$f'f'' = Af' + cff' - \frac{1}{2}f^2f^1,$$

$$\left[\frac{1}{2}(f')^2\right]' = (Af)' + (\frac{c}{2}f^2)' - (\frac{1}{6}f^3)'$$

再次積分得

$$(f')^2 = 2Af + cf^2 - \frac{1}{3}f^3 + B \tag{5}$$

其中 B 爲第二個任意常數。

在此我們考慮邊界值爲

$$f, f', f'' \longrightarrow 0 \quad \text{當} \quad \xi \longrightarrow \pm\infty \tag{6}$$

條件 (6) 實際上就是在描述孤立子 (Soliton)。在這條件下, 可得

$$A = B = 0. \tag{7}$$

因此

$$(f')^2 = f^2(c - \frac{1}{3}f) \tag{8}$$

(8) 式要有意義, 當然要要求

$$3c - f \geq 0$$

將 (8) 改寫爲

$$\int \frac{df}{f(c-\frac{1}{3}f)^{\frac{1}{2}}} = \pm\int d\xi \tag{9}$$

令 $f = 3c\ \mathrm{sech}^2\theta$

則其解爲

$$f(x-ct) = 3c\ \mathrm{sech}^2[\frac{1}{2}\sqrt{c}(x-ct-x_0)] \tag{10}$$

其中x_0爲任意積分常數。另外關於正負符號的選取, 那是多餘的, 因爲對我們的解而言, 它是一個偶函數。(如果$x_0 = 0$)。

其實這也說明了 Russell 發現的波, 實際上是 KdV 方程式的一個解, 但這事件, 並沒有帶來太大之衝擊, 頂多只是認爲孤立子 (Soliton) 是個有用的工具吧了! 有更長的一段時間孤立波被視爲在處理二維非線性波時偶然冒出來一支不重要的外來語。卻不知後來它在物理學, 數學上佔了一席之地。

KdV方程式證實了 Russell 對兩個孤立子碰撞時的觀察, 即

“一個高, 薄呈駝峰狀的孤立子, 會追上它較矮胖的兄弟後, 這兩個波相會之後合而爲一。經過一陣混亂之後, 這個合而爲一的波又彼此分開, 較快較高的那道波以原有的速度前進, 漸漸將較矮胖的波遠遠地拋在腦後。”

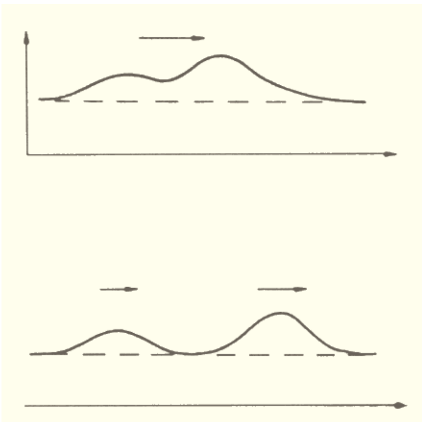

圖1 S. Russell’s 的孤立子隨即分解爲兩個孤立子, 振幅大的移動速度快, 最終遠離振幅少 (長的矮的)。

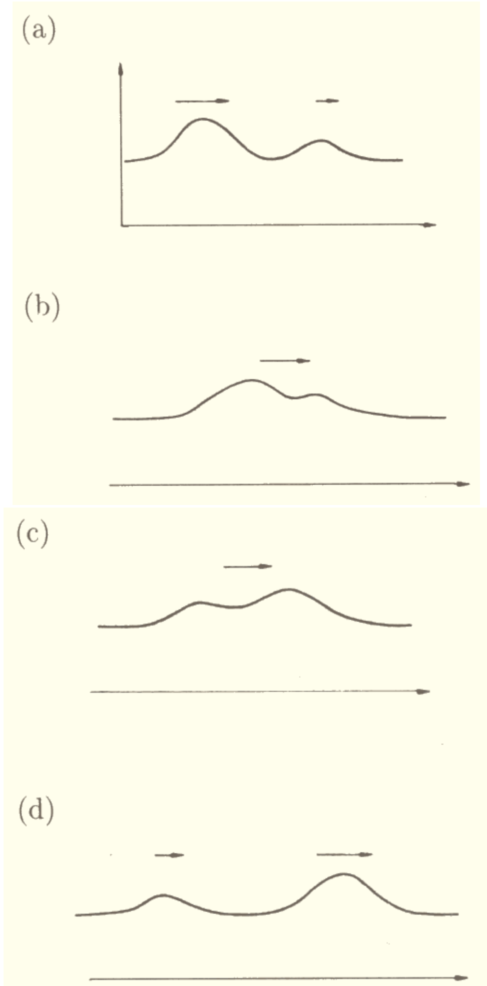

圖2 兩個孤立波在時間 (a) $t = t$; (b) $t = t_2 > t_1$; (c) $t = t_3 > t_2$; (d) $t = t_4 > t_3$ 之交會情形。

在兩道孤立子交會之處, 我們無法去分辨二者, 但交會過後, 兩波又重新出現, 一付若無其事之態。這是否意味著在非線性的耦合作用下存有某種“記憶”, 使它們能記起碰撞前的模樣, 這實在是件非比尋常的事實。然而孤立波引起人們的注意, 卻得等到1965年, 由著名的物理學家費米 (Fermi) 在數學家 Ulam 和 Pasta 的協助下, 在 Los Alamos 進行關於金屬內部的振動: 爲了觀

察晶格 (lattice) 中所有振動模式之間分享能量的方式。爲了以數學方式表達其關係式他們必須加入一個微不足道的非線性項, 此項對應於振態的交互作用。實際上, 他們所用的數學模型正是離散形的 KdV 方程。值得一提的是若沒有該非線性項。那麼在這個模型中 "能量" 便無法互通有無。實驗的結果, 這個微小的非線性項。控制了整個系統, 把它從一個線性行爲良好的晶格搖身一變而爲 "孤立子" 的競技場。更重要的是在這裡面並沒有所謂的 "能量等分" (eguipartition of energy)。

根據此原則, 如果所有熱能要指定給某一特定晶格振動模式的話, 那麼很快地這份能量將會擴散出去而且均勻地分佈於每個晶格中。費米等人也是如此相信, 而最初的數據也是這樣顯示, 但隨著時間的前進, 令人震撼的現象產生, 即能量並沒有被均勻分享, 反而是集中在其中一個振態。這個實驗再次說明非線性晶格具有某種 "記憶", 這是在 "線性系統" 不可能發生的。故事並沒有因此而結束。

眞正開啓孤立波的新紀元當屬1965年, 由二位普林斯頓的物理學家, 應用數學家 (讀物理的說, 他們是物理學家, 學數學的則說他們是應用數學家) M. Kruskal 與 N. Zalusky。他們考慮 KdV 方程的起初—邊界值問題 (邊界爲週期邊界)

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \delta^2 u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = \cos(\pi x) \qquad 0 \le x \le 2. \end{cases} \tag{11}$$

並要求對所有的時刻 t

$$u,\ u_x,\ u_{xx}\text{爲在 } [0,\ 2] \text{上的週期函數} \tag{12}$$

他們選取$\delta = 0.022$。所得的解如圖所示。

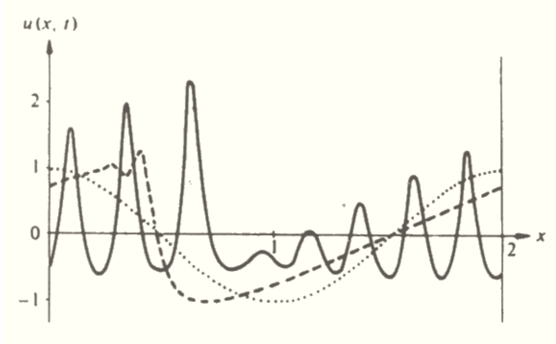

圖3. M. Kruskal 與 N. Zabusky 所得 Kdv。

(1) (虛線) 表時間$t = 0$ 之解

(2) (斷線) 表時間$t = \frac{1}{\pi}$ 之解

(3) (實線) 表時間$t = \frac{3.6}{\pi}$ 之解

隨著時間的演進餘弦波開始擠壓且幾乎產生截波 (shock wave), 就在此時戲的主角換爲相散項 (dispersion term), $(\delta^2 u_{xxx})$, 縱使渺小, 但卻不是微不足道, 反而是舉足輕重且在某種意義下與非線性項兩者之間有著巧妙的平衡關係。實際上是這樣的, 其解漸演變爲一列由八個像 sech 函數組成的波, 而在這當中速度快 (即長得較高) 的波, 總是可以追上速度慢 (較矮) 的波, 好像是高的波吞下矮的波, 但後來又把它吐出來一般。但最令人震撼的倒是再經過長一點的時間後, 原先最起初的餘弦波又出現了! 這個例子就是典型的回歸論(recurrence)。

兩年之後, M Kruskal, J. Green, C Gardener 與 R. Miura 四人找到 KdV 方程, 這不尋常性質的理論基礎, 他們的想法如下:

爲了方便我們將 KdV 方程式寫爲

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (13)$$

Miura 考慮這樣的變換

$$u = v^2 + v_x \qquad (14)$$

有時, 我們也稱這變換爲 Miura 變換, 如果讀者曾修過常微分方程的話, 不難看出, 若將u當做已知, 而視 (14) 爲v的微分方程。其實它是v的一個 Ricatti 微分方程。這件事實將爲我們開啓解 KdV 方程之鑰。將 (14) 式直接代入 (13), 可得

$$(2v + \frac{\partial}{\partial x})(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) = 0 \qquad (15)$$

這件事告訴我們若v爲 mKdV 方程的解,

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0 \qquad (16)$$

那麼經過 Miura 變換 (14) 所得的u會是 KdV 方程的解。因此整個問題的關鍵, 便在 (14) 式。關於 Ricatti 方程式, 可利用底下的變換將之化爲一線性微分方程

$$v = \frac{\Psi_x}{\Psi}, \Psi \neq 0 \qquad (17)$$

因此 (14) 式成爲

$$\Psi_{xx} - u\Psi = 0 \qquad (18)$$

不失一般性, 可將 (18) 再改寫爲

$$\Psi_{xx} + (\lambda - u)\Psi = 0 \qquad (19)$$

啊哈! 我們再一次回到常微分程的理論, 也願意提醒讀者“常微分方程當然是有用, 且很有用的數學。”

(19) 式, 就是一個 Sturm-Liouville 方程; 其中λ是其固有値, u可視爲位能 (potential), 如果讀者對物理學有興趣, 我們也可給 (19) 式, 量子力學的解釋, 即它是一個位能爲u, 能量爲λ的穩定, 線性 Schrödinger 方程。爲著方便我們將兩者寫在一起, 以利比較

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 & \text{(KdV)} \\ \Psi_{xx} + (\lambda - u)\Psi = 0 & \text{(Schrödinger)} \end{cases} \qquad (20)$$

由上式知位能 (potential)u 之演進, 乃是依 KdV 方程而來, 但對 Schrödinger 方程而言。它是個與時間 t 無關的微分方程, 所以我們自然要問, “λ 與 u 是怎樣演化的?” 我們分別對 Schrödinger 方程取 x- 微分與 t-微分, 得

$$\begin{cases} \Psi_{xxx} - u_x\Psi + (\lambda - u)\Psi_x = 0 \\ \Psi_{xxt} + (\lambda_t - u_t)\Psi + (\lambda - u)\Psi_t = 0 \end{cases} \qquad (21)$$

其中u滿足 KdV 方程。直接計算 (複雜) 可得

$$\lambda_t \Psi^2 + \frac{\partial}{\partial x}(\Psi R_x - \Psi_x R) = 0 \qquad (22)$$

其中

$$R(x,t) \equiv \Psi_t + u_x\Psi - 2(u + 2\lambda)\Psi_x \qquad (23)$$

由 (22) 式知如果Ψ是平方可積, 且當x在無窮遠爲0的話, 可得

$$\lambda_t = 0 \qquad (24)$$

這件事實告訴我們, 當$u(x,t)$隨著時間的演化, 所得的離散值譜 (discrete spectrum) 基本上是不隨時間改變。這相當於告訴我們 (9) 式之固有值 (離散)

$\lambda_n < 0,\ n=1,2,\cdots N$

是運動常數 (contant of motion)

現在由 (22) 式可得

$$\Psi R_x - \Psi_x = D$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R}{\Psi}\right) = \frac{\Psi R_x - \Psi_x R}{\Psi^2} = \frac{D}{\Psi^2}$$

所以$\Psi_t + u_x\Psi - 2(u+2\lambda)\Psi_x = c\Psi + D\Psi\int\frac{1}{\Psi^2}dx$

因為Ψ在無窮遠處為0, 所以$D=0$。

$$\Psi_t = (c-u_x)\Psi + 4\left(\lambda+\frac{u}{2}\right)\Psi_x \qquad (25)$$

這告訴我們什麼呢? 就是將原先非線性的 KdV 方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

轉換為二個"線性"微分方程

$$\begin{cases}\Psi_{xx} + (\lambda - u)\Psi = 0\\ \Psi_t = (c-u_x)\Psi + 4(\lambda+\frac{u}{2})\Psi_x\end{cases} \qquad (26)$$

的可積條件。

令$S(t)$為 (26) 解Ψ之漸近資料 (asymptotic data), 意即在時間t的散射值 (scattering data), 要提的是$S(t)$並不難解, 因為 (26) 為一線性微分方程。整個的圖畫就是 KdV 方程的起值$u(x,0)$ 直接轉換起初的散射值$S(0)$。而由微分方程 (26) 可得$S(t)$之值, 因此如果存在有逆變換, 我們便可求得 KdV 方程式的解, $u(x,t)$, 整個概念就是所謂的逆散射變換 (inverse scattering transform)。

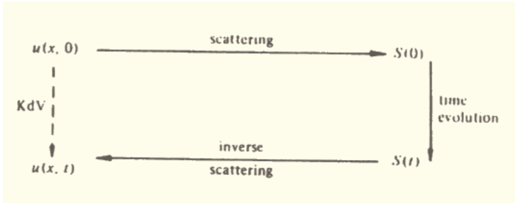

圖 4

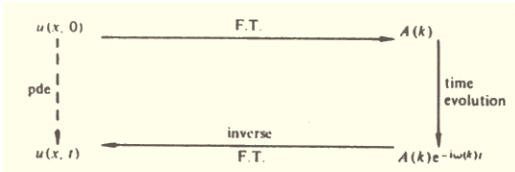

圖 5

整個上面所談的過程, 與我們在解線性偏微分方程時。用富氏變換是相似的。茲以 KdV 方程式的線性化方程來討論。

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \qquad (27)$$

其富氏變換 (Fourier transform) 為

$$\widehat{u}(k,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ikx}dx \qquad (28)$$

且$\widehat{u}$滿足下面之微分方程

$$\partial_t\widehat{u} + i(k-k^3)\widehat{u} = 0 \qquad (29)$$

再取逆變換 (inverse transform) 得

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{u}(k,t)e^{ikx}dk \qquad (30)$$

在此

$$A(k) = \widehat{u}(k,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,0)e^{-ikx}dx \qquad (31)$$

相似於起初的散射值。而$\hat{u}(k,t)$之值則可由 (29) 式所決定。其實, 在線性的時候, 逆散射變換就是富氏變換。

以上所言就是 M. Kruskal 等人所發展出來的逆散射變換理論。 它告訴我們, KdV方程之孤立波的演化是由線性 Schrödinger 方程所描述。他們還證明 KdV 方程有無窮多個守恆量。

孤立子之存在, 並沒有限制在水波, 甚至在量子力學亦有相同的性質, 這是1971年前蘇聯學者 V. Zakharov 和 A. Shabat發現的。他們證明了一維空間的非線性 Schrödinger 方程

$$u_t + |u|^2 u_x + u_{xx} = 0 \tag{32}$$

有著與 KdV 方程相同的性質。

近年來這一類的方程式 (我們稱之爲非線性可積系統 (nonlinear integrable system) 如雨後春筍般地成長, 更因爲與黎曼面 (Rie- mamn surface)、代數幾何、拓撲學 (topology) 等數學有相關連, 我們更可稱之爲非線性可積系統的數學理論。

孤立子不僅在水中產生, 也在大氣層中發生, 某些冷氣團本身就是孤立波。但也許最爲人熟知的孤立波是在木星上, 我們稱之爲大紅班 (great red spot) 就是一種孤立子, 孤立子渦流也可在超流體(superfluid helium) 中發現, 這是一種可以高速流動而不產生紊流的流體。此處形成的不是磁通量的渦旋, 而是轉動的超流體形成瘦長圓柱狀或條狀的形狀。它們會在超流體狀態下, 造出令人好奇的花樣。另外在醫學上探討神經系統, 都可發現孤立子的芳蹤。

在場論 (field theory) 中與孤立子連結的問題中, 第一也是最複雜的, 則當屬相對不變量 (relativistic invariants) 的發現。所謂相對不變是指經過羅倫茲變換 (Lorentz transformation) 之後, 仍保持原來的形像。

到目前爲此所知道的可積系統 (integrable system) 大部份都是在1 + 1維 (一維空間, 一維時間), 但像在場論而言, 它是個3 + 1維的 Minkowski 空間; 因此這確實是一大難題與限制。雖如此, 1 + 1維仍是我們瞭解3 + 1維之起步。

除了 KdV 方程, 非線性 Schrödinger 方程外最爲人所知的可積系統, 就算是 Sine-Gorden 方程

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u \tag{33}$$

由於這個偏微分方程的完全可積性, 且其解牽涉到稱爲扭結 (kinks) 和反扭結 (anti kinks) 的東西, 當兩個扭結孤立波碰撞時會互相排斥, 兩個反扭結碰撞時亦然; 但是一個扭結和一個反扭結則彼此吸引, 這情形就好像是電荷相反的基本粒子一般。這引導人們進而研究自發性對稱解體 (spontaneous symmetry-breaking) 的作用, 以瞭解不同眞空狀態彼此間如何轉換, 但更重要的倒是明白如何量化1 + 1可積系統的理論。Yang-Mills也有可能是一個可積系統, 但到目前爲止這還只是猜測 (conjecture) 而已。

孤立波之存在並沒有被限制在可積系統。例如在場論中其 Lagrangian 爲

$$\mathcal{L}(\varphi) = (\partial_t \varphi)^2 + (\partial_x \varphi)^2 - v(\varphi) \tag{34}$$

其中$v(\phi)$爲位能 (potential), 就我們所知之一情形, 當

$$v(\varphi)=\frac{\mu^2}{2}\varphi^2+\frac{\lambda}{4}\varphi^4 \tag{35}$$

時, 就存在有孤立波解, 但明顯地這並不是個可積系統。

孤立子產生在具自發性對稱解體 (spontaneous symmetry-breaking) 之理論, 而他們的性質則與規範場 (gauge field), 空間的拓撲結構相關聯。孤立子理論之應用也導致在研究眞空狀態的結構 (stucture of vacumms) 等皆有重大發現。一連串有趣的問題正接踵而至, 而他們與最先端的科學是這麼靠近, 實在還沒成熟到可以作一般性的說明。

參考資料

1. J. Briggs & F. D. Peat, Turbulent Mirror, Harper Collins Publishers, Inc., 1989.
2. 王文彥譯, 渾沌魔鏡, 牛頓出版社, 1993, (1 之中譯本)
3. P. G. Drazin, & R. S. Johnson, Solitons: an introduction, Cambridge University Press, 1990.

—本文作者任教於國立成功大學數學系—