數播信箱

葉東進老師在「課堂記事二則」一文中 (數學傳播, 第18卷 第4 期, 79 − 81 頁) 提到下面的題目:

設 $a, b \in R$, $f(x) = x^2 + ax + b$, $g(x) = f(f(x))$, 試證 $g(x) - x$ 可被 $f(x) - x$ 整除。

葉老師提到一個簡潔的作法, 但其中需要把相異根或重根情形分開討論, 而且在重根時用到微分。

本文在此提供一僅用高一工具就可瞭解的做法, 這個做法可同時處理相異根及重根的情形, 這個做法如下:

$$\begin{aligned}
\text{假設} \quad & f(x) = x^2 + ax + b \ \text{ 則} \\
g(x) &= f(f(x)) = [f(x)]^2 + a[f(x)] + b \\
&= [f(x) - x + x]^2 + a[f(x) - x + x] + b \\
&= [f(x) - x]^2 + 2x[f(x) - x] + x^2 + a[f(x) - x] + ax + b \\
&= [f(x) - x]^2 + (2x + a)[f(x) - x] + x^2 + ax + b \\
&= [f(x) - x]^2 + (2x + a)[f(x) - x] + f(x)
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
g(x) - x &= [f(x) - x]^2 + (2x + a)[f(x) - x] + [f(x) - x] \\
&= [f(x) - x][(f(x) - x) + (2x + a) + 1] \\
&= [f(x) - x][x^2 + (a + 1)x + a + b + 1]
\end{aligned}$$

因此, $g(x) - x$ 可被 $f(x) - x$ 整除。

上面的做法對 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 是一般的 n次 $(n \geq 2)$ 實係數或複係數多項式也對, 有興趣的讀者, 可自行試證之。

陳國傑

—彰化師範大學數學系—