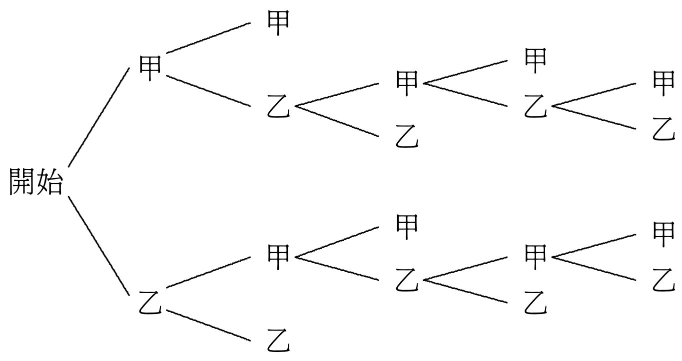
矩陣與馬可夫鏈

石厚高

馬可夫鏈對中學生來說是一個不太好接受的觀念, 現行的高三下課本理科數學只有一個例題, 講來講去學生是一頭霧水的多, 能夠徹底明白的實在是少而又少。教這一節之前若能對樹形圖稍作介紹, 效果會好得多。樹形圖的概念學生很容易接受, 它是直觀也是經驗, 有人說數學不是經驗科學, 無疑的是說較爲深奥的數學理論; 至於平面幾何的初步發展或正整數的加法與減法, 都是與經驗無法脫離關係的。現行高中課本未曾強調樹形圖實在遺憾。它沒有甚麼理論, 用例題說明易學易用, 教起來輕鬆學來容易。

一系列有限的連續發生事件可以用樹形圖來表示, 從圖形中又可以求出各種事件發生的機率。妙的是列出圖形時是由上而下而在求機率時卻由下而上, 找到合於條件的事件, 把它們一系列乘起再加起來就成了。

甲乙二人功力相當, 某項競技規定第一個連贏二次或共贏三次者爲勝, 求甲乙獲勝之機率。
解: 作樹形圖



結束時共有十種可能結果

甲勝:　甲甲, 甲乙甲甲, 甲乙甲乙甲, 乙甲甲, 乙甲乙甲甲
乙勝:　乙乙, 乙甲乙乙, 乙甲乙甲乙, 甲乙乙, 甲乙甲乙乙

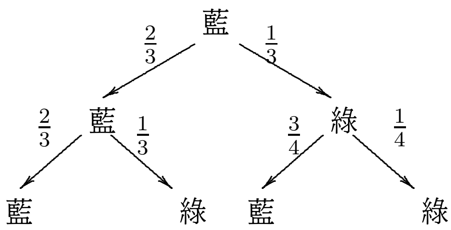
甲獲勝之機率爲 $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}$ 乙獲勝之機率爲 $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}=\frac{1}{2}$

最多只能到第五局, 沒有馬可夫鏈, 也沒有推移矩陣。是個很單純的機率問題。馬可夫鏈是機率論裡的典型又重要的問題, 有些問題的機率不是一成不變的, 端賴前一次試驗的結果。看看下面的例子, 用來說明馬可夫鏈就很容易理解。

設一袋中有8個藍球4個綠色球, 某君手持一藍色球, 他自袋中任取一球, 把手裡藍色球放入袋中, 重複這個試驗, 並記錄每次試驗後手持球的顏色。

某君手持藍色球時, 袋中共有12個球, 其中8個爲藍色球, 自袋中任取一球, 是藍色色球之機率爲 $\frac{2}{3}$, 是綠色球之機率爲 $\frac{1}{3}$; 若某君手持綠色球, 而袋中共有12個球, 其中9個爲藍色球, 自袋中任取一球, 是藍色球之機率爲 $\frac{3}{4}$, 是綠色球之機率爲 $\frac{1}{4}$。

每次交換就是一個試驗, 結果呢? 只有某君手持藍色球或綠色球二種情況, 如下樹形圖:



從這個圖可以知道

第一次試驗

$$\text{出現藍色球之機率爲 } \frac{2}{3} \text{ 出現綠色球之機率爲 } \frac{1}{3}$$

第二次試驗

$$\text{出現藍色球之機率爲 } \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{25}{36}$$
$$\text{出現綠色球之機率爲 } \frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{36}$$

這種試驗可以繼續下去, 而且每次交換都呈現同型結果。

設經過 n 次試驗後, 出現藍色球之機率爲 S_n, 出現綠色球之機率爲 T_n, 則經過 $n+1$ 次試驗後,

$$\text{出現藍色球之機率爲 } S_{n+1} = \frac{2}{3}S_n+\frac{3}{4}T_n$$
$$\text{出現綠色球之機率爲 } T_{n+1} = \frac{1}{3}S_n+\frac{1}{4}T_n$$

使用矩陣可以表示得更爲簡捷

$$\begin{bmatrix} S_{n+1} \\ T_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}S_n + \frac{3}{4}T_n \\ \frac{1}{3}S_n + \frac{1}{4}T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n \\ T_n \end{bmatrix}$$

從第n次試驗結果可以求出第 $n+1$ 次試驗的結果, 每次都要用到矩陣 $A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ 所以把它叫作推移矩陣, 一般而言都是方陣, 各行之和均爲1, 各元皆不爲負, 具有這種性質的矩陣叫作馬可夫矩陣, 在 [看]它的時候要揚棄傳統的習慣: 第一列第一行之元爲 $\frac{2}{3}$, 第一列第二行之元爲 $\frac{3}{4}$, 第二列第一行之元爲 $\frac{1}{3}$, $\cdots$ 要從另一角度來 [看]

$$\begin{array}{ccc} & & \text{從} \\ & & \begin{array}{cc} \text{藍} & \text{綠} \end{array} \\ \text{到} & \begin{array}{c} \text{藍} \\ \\ \text{綠} \end{array} & \begin{bmatrix} \dfrac{2}{3} & \dfrac{3}{4} \\ \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} \end{bmatrix} \end{array}$$

從出現藍色球至再出現藍色球之機率爲 $\frac{2}{3}$

從出現藍色球至　出現綠色球之機率爲 $\frac{1}{3}$

從出現綠色球至　出現藍色球之機率爲 $\frac{3}{4}\cdots$

所以

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} S_3 \\ T_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \\ T_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{25}{36} \\ \frac{11}{36} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{299}{432} \\ \frac{133}{432} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1}$$

故得第三次試驗

出現藍色球之機率爲 $\frac{299}{432}$, 出現綠色球之機率爲 $\frac{133}{432}$

把 (1) 式改寫成下式就更清楚了

$$\begin{bmatrix} S_3 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_2 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ T_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} S_1 \\ T_1 \end{bmatrix}$$

故得

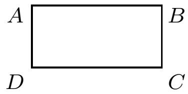
$$\begin{bmatrix} S_3 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} S_1 \\ T_1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} S_4 \\ T_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} S_1 \\ T_1 \end{bmatrix} \cdots$$

最後結論是

$$\begin{bmatrix} S_n \\ T_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} S_1 \\ T_1 \end{bmatrix}$$

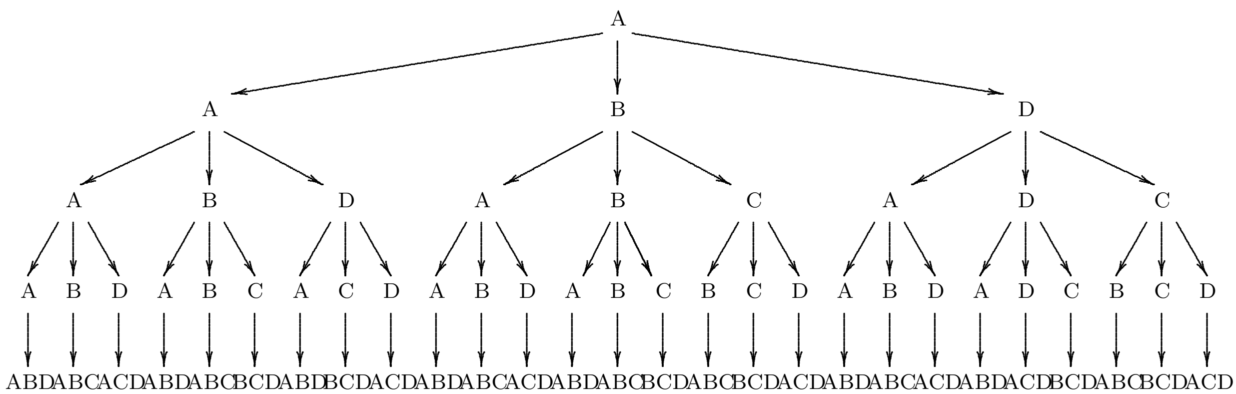
最讓學生困惑的是推移矩陣的導出, 爲甚麼要這麼規定? 有沒有公式往裡面一代就天下太平了。想要公式的學生會失望了, 推移矩陣無公式可代, 每一題都要自己導出。每一題都有自己的推移矩陣, 電腦科學家一個程式解決一個問題, 數學家一個式子解決所有問題, 所以數學家比電腦科學家偉大。這一題的推移矩陣如前述, 下一題的推移矩陣也一樣要從頭作起。

民國七十八年大專聯考數學 (自然組) 試題有下面的一題:

有一人流浪 A、B、C、D 四鎮間, 此四鎮相鄰關係如右圖, 

假設每日清晨, 此人決定當日夜晚留宿該鎮, 或改而前往相鄰任一鎮之機率皆爲 $\frac{1}{3}$。若此人第一夜宿於 A 鎮, 則第三夜亦宿於 A 鎮之機率爲 ______。而第五夜此人宿於 A 鎮之機率爲______; 宿於 B 鎮之機率爲 ______。

這題用樹形圖作起來是比較容易, 第一夜住 A 鎮, 第二夜只能住 A、B、D 三鎮, 第一夜住 B 鎮, 第二夜只能住 A、B、C 三鎮, 第一夜住 C 鎮, 第二夜只能住 B、C、D 三鎮, 第一夜住 D 鎮, 第二夜只能住 A、C、D 三鎮, 樹形圖共有五列, 第一、二、三、四、五列各表第一、二、三、四、五夜住宿何鎮。按題意由任一鎮至分支三鎮住宿之機率皆爲 $\frac{1}{3}$, 由樹形圖很容易可以看出來,



第三列裡 A 共有3個, 故得第三夜宿於 A 鎮之機率爲 $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

第五列裡 A 共有21個, 故得第三夜宿於 A 鎮之機率爲21個$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$即$\frac{7}{27}$

用馬可夫鏈也可以作, 此人最初某夜宿於 A、B、C、D 四鎮之機率爲 1、0、0、0, 第一、二夜宿於四鎮之機率配合有十六種, 即 AA、AB、AC、AD、BA...DA、DB、DC、DD, 列表如 (1)

(1)

		某天住的鎮			
	機率	A	B	C	D
第二天住的鎮	A	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
	C	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	D	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(2)

		第二天住的鎮			
	機率	A	B	C	D
第三天住的鎮	A	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
	C	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	D	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

把 [某天住的鎮]改成 [第二天住的鎮]而 [第二天住的鎮]改成 [第三天住的鎮]就成了表 (2), 機率未變。如果繼續: 把 [第二天住的鎮]改成 [第三天住的鎮], 而 [第三天住的鎮]改成 [第四天住的鎮], 也是一樣放諸四海而皆準。矩陣很有用, $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ [用了可以再用], 現在來看它有甚麼用。

第一夜此人住 A 鎮, 所以住 B、C、D 之機率皆為 0, 故原始狀態為 $M = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

第三夜住各鎮之機率為 $P^2M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}$

第四夜住各鎮之機率為 $P^3M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{27} \\ \frac{7}{27} \\ \frac{6}{27} \\ \frac{7}{27} \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}$

第五夜住各鎮之機率為 $P^4M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{21}{81} \\ \frac{20}{81} \\ \frac{20}{81} \\ \frac{20}{81} \end{bmatrix} \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix}$

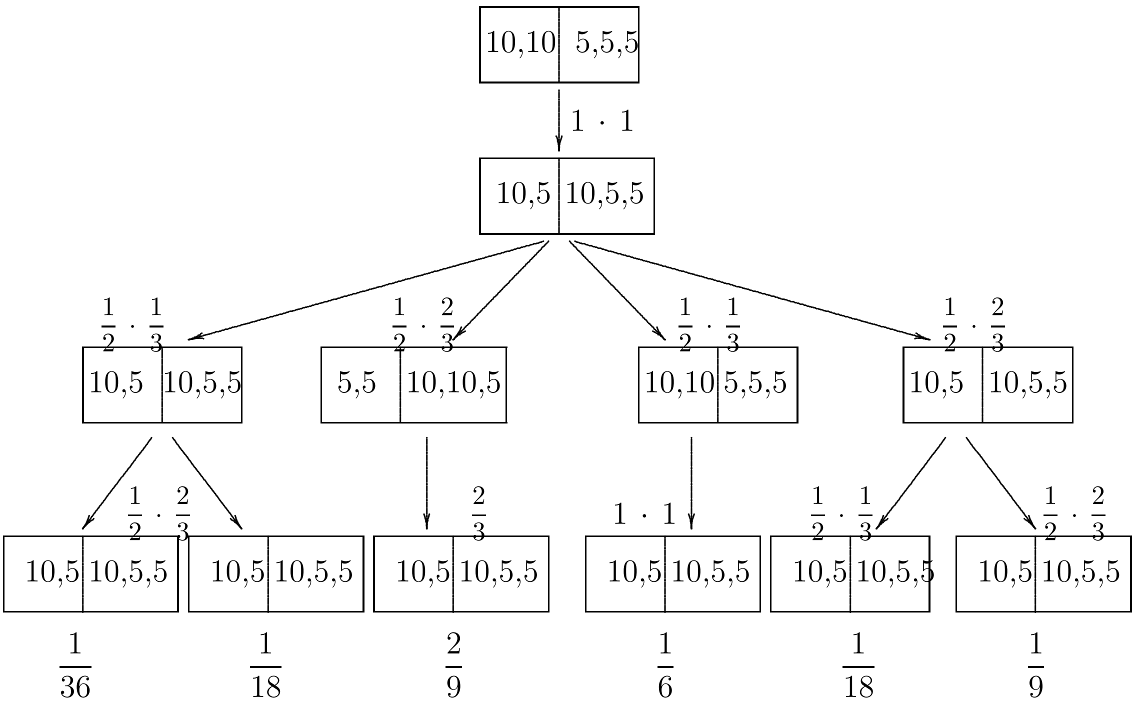
故得第五夜住 A 鎮之機率為 $\frac{7}{27}$ 第五夜住 B 鎮之機率為 $\frac{20}{81}$

許算 P^2M、P^3M 或 P^4M時, 當然可以直接計算 P^2、P^3 或 P^4 再計算各式之值, 也可以用前一次的結果借力使力計算 $(PP)M$、$((PP)P)M$ 或 $(((PP)P)P)M$, 運用之妙存乎一心, 有些數據用不著, 實在不必算出來, 考生心情緊張想必體會不到這一點。問問大專聯考考生, 作出來的仍以使用樹形圖的為多。

民國八十一年北市公立高中升大專模擬考自然組數學科有一題機率:

設 A 袋有二個10元硬幣, B 袋有三個5元硬幣, 從 A 袋中任取一個硬幣與 B 袋中任取一個硬幣互換, 若這樣的互換進行三次求 (1) 求 A 袋中10元硬幣恰為一個之機率是 ______。(2) 求 A 袋中期望金額 ______。

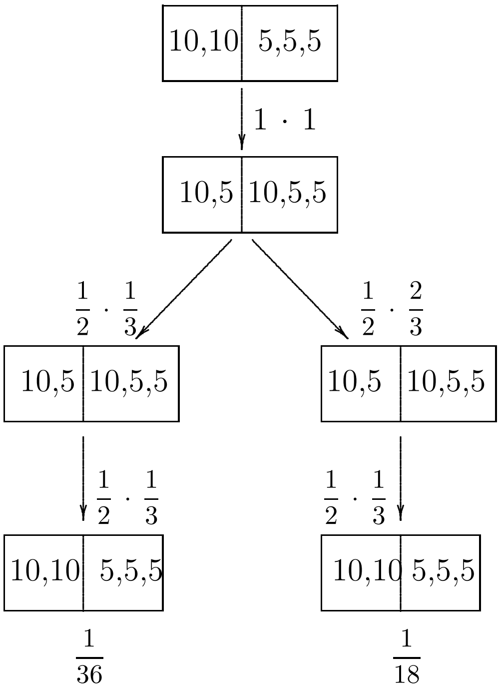
先作樹形圖, 第三次互換結果沒有全部列出來。



故知互換三次後A袋中10元硬幣恰爲一個之機率是

$$\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{2}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\frac{1}{9}=\frac{23}{36}$$

至於(2)求A袋中期望金額就需要含二個10元幣與含零個10元幣之二種機率, 利用前面的樹形圖



故得A袋含二個10元幣之機率爲 $\frac{1}{36}+\frac{1}{18}=\frac{3}{36}$
故得A袋含零個10元幣之機率爲 $\frac{36-23-3}{36}=\frac{10}{36}$

x	0	1	2
f(x)	$\frac{10}{36}$	$\frac{23}{36}$	$\frac{3}{36}$

故得A袋期望值爲

$$10\cdot\frac{10}{36}+15\cdot\frac{23}{36}+20\cdot\frac{3}{36}=\frac{505}{36}$$

A袋所含硬幣有三種情況 $\boxed{10\ 10}$、$\boxed{10\ \ 5}$、$\boxed{5\ \ 5}$, 交換後任一種情況轉爲另一種之機率共有九種, 他們是

機率	$\boxed{10\ 10}$	$\boxed{10\ \ 5}$	$\boxed{5\ \ 5}$
$\boxed{10\ 10}$	0	$\frac{1}{6}$	0
$\boxed{10\ \ 5}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
$\boxed{5\ \ 5}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

故得推移矩陣 $P=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ 起始狀態 $M=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$

第一次互換

$$PM=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{第一次互換後A袋有二個10元幣之機率}\\ \text{第一次互換後A袋有一個10元幣之機率}\\ \text{第一次互換後A袋有二個5元幣之機率}\end{matrix}$$

第二次互換

$$P^2M=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{第二次互換後A袋有二個10元幣之機率}\\ \text{第二次互換後A袋有一個10元幣之機率}\\ \text{第二次互換後A袋有二個5元幣之機率}\end{matrix}$$

第三次互換

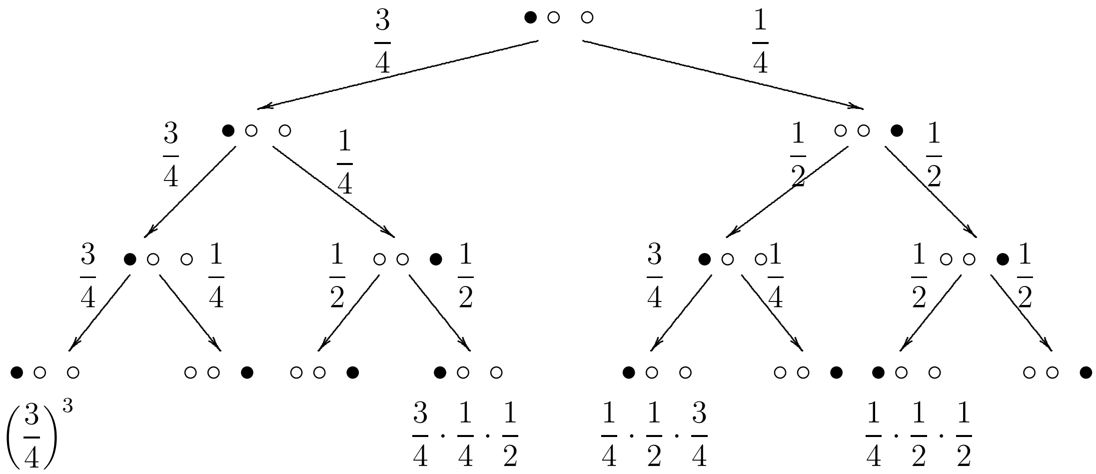
$$P^3M=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{6} & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{12}\\ \frac{23}{36}\\ \frac{10}{36}\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{第三次互換後A袋有二個10元幣之機率}\\ \text{第三次互換後A袋有一個10元幣之機率}\\ \text{第三次互換後A袋有二個5元幣之機率}\end{matrix}$$

這一題作對的很少, 大多數作對第一小題, 第二小題作對的每班一、二名罷了。能想到馬可夫鏈的更是少而又少。馬可夫鏈是矩陣應用之一, 又應用得這麼漂亮, 數學家眞讓人佩服, 不過對中學生來說是難了些。

民國八十一年大專聯考自然組數學科有一題機率:

設 A、B 二箱中, A 箱內有兩球, 一黑一白, B 箱內有一白球。甲乙二人輪流取球, 每次先由甲自 A 箱內任取一球, 放入 B 箱內, 再由乙自 B 箱內任取一球放入 A 箱, 這樣稱爲第一局。那麼當第一局結束時, A 箱內兩球爲一黑一白之機率爲 ______。那麼當第三局結束時, A 箱內兩球爲一黑一白之機率爲 ______。(請將答案化成最簡分數)

先把樹形圖列出來, 以 ●○ ○表 A 袋內有一黑球一白球而 B 袋內有一白球; 以 ○○ ●表 A 袋內有二白球而 B 袋內有一黑球。



故得第一局結束時, A 箱內兩球爲一黑一白之機率爲 $\frac{3}{4}$。

第三局結束時, A 箱內兩球爲一黑一白之機率爲

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{27+6+6+4}{64}=\frac{43}{64}$$

用馬可夫鏈來解要列出A袋由一黑球一白球轉成一黑球一白球、一黑球一白球轉成二白球、二白球轉成一黑球一白球以及二白球轉成二白球共四種情況的機率, 它們的值是

機率	黑白	白白
黑白	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
白白	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

故得推移矩陣 $P=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$

原始狀態 $M=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ $\begin{matrix}\text{A袋內有一黑球一白球之機率}\\ \text{A袋內有二白球之機率}\end{matrix}$

第一局結束時

$$PM=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\ \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{A袋內有一黑球一白球之機率}\\ \text{A袋內有二白球之機率}\end{matrix}$$

第二局結束時

$$P^2M=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{11}{16}\\ \frac{5}{16}\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{A袋內有一黑球一白球之機率}\\ \text{A袋內有二白球之機率}\end{matrix}$$

第三局結束時

$$P^3M=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{43}{64}\\ \frac{21}{64}\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{A袋內有一黑球一白球之機率}\\ \text{A袋內有二白球之機率}\end{matrix}$$

結果與利用樹形圖所作相同。

八十一年七月一日大專聯考首日考了自然組數學, 有人以爲北部地區考生佔了"十分"的便宜, 兩個填空各5分。其實不然。難題還是難題, 並不因爲模擬測驗考過, 就會一定得分。今年我給兩班學生講了模擬測驗這題, 再要他們作聯考這題, 每班不過二、三人會作而已。他們都是表現傑出的學生, 講與不講都一樣會作。我很喜歡馬可夫鏈, 不過中學仍以不授爲宜。

—本文作者任教於建國中學—