淺述高中三角之功用與教材之變革

賴敦生

壹、前言

高中三角教材經歷多次修改, 內容、領域、方法已有顯著的差異, 本文僅將近數十年來的變化分四階段 (范氏大代數時期、S.M.S.G 時期、實驗教本時期及現行教本期間) 述說, 由各階段所強調的理念回顧教材編寫的特徵, 驅動方式, 領域之拓展與刪減是本文淺述的架構, 藉以探討教學原理, 體會“爲何而學, 學而何用”是最終的祈求。

本文淺述高中三角的功用, 在教本之訴求, 習題之引領下, 從邊角關係、餘弦律、. . . 、積分工具到數值方法舉例說明三角學在教材變革中所扮演之角色遷移, 在突顯功能價值的潮流中, 依循教本旨意教學、研習, 可拋棄無效的解題, 減輕課業負擔, 尊重生命, 珍惜人生!

教材演變中, 三角學領域業已拓展, 功力更爲強勁、鮮明。筆者大膽記述了這豐厚的成果, 在新課程標準下編定的新教材裏, 相信就在這雄厚的基礎上更進一步的發揚光大, 三角學教學更形有趣, 熱烈歡迎這項新教材之變革。

貳、教材之變革

I、簡述三角學的源起:

1° 三角學創始於西元約150年, 爲當時天文學家希伯諸斯 (Hipparchus of Nicaea) 用以作爲研究天文的工具。至十五世紀中葉, 三角學突飛猛進, 有關平面三角及球面三角之解法均曾詳細論及, 故三角學從開始長足的進展至目前的規模, 不過四百餘年而已。

2° 三角學之英文名稱 trigonometry, 約定名於西元1600年, 實際導源於希臘文 trigono (三角) 和“metrein”(測量), 其原義爲三角形測量 (解法)。

3° 希臘 Hipparchus (180∼ 125 B.C.) 製作“弦表”, 埃及 ptolemy (85∼ 165) 製作三角函數表, 歐拉著作: “無窮小分析引論”將討論三角形的三角學進一步演變成研究三角函數的工具, 並以分析之姿態述說三角, 形成分析學的一支。

4° 明崇貞四年 (1631 年) 徐光啓編“大測”是三角學輸入我國的開始。(引自: 谷超豪著「數學辭典」(以上述說對下段之說明有所助益)

II、高中三角教材之變革:

1° 民國 54 年以前的高中三角–簡記爲范氏大代數時期, 國內三角教學是以直角形內任意兩邊之比, 是一銳角的函數起始述說。講授內容以恆等運算, 擴充爲廣義三角函數, 認眞的解一三角形的邊或角的求法, 還引入對數函數表, 強化三角測量的教學, 同時反三角函數、三角方程式等等皆有相當豐富的解題訓練。此時是高中一年級學生每週三小時, 期限長達一年的必修課程。

2° 民國55年至民國61年的 S.M.S.G 時期, 以函數觀點描述三角學, 重要的是標示三角函數是週期函數圖形的描繪, 在定義域、值域的層層限制下, 透過1對1且映成的函數特徵寫出了反三角函數的定義、圖形、演算, 相當細緻, 加重和差化積、三角級數, 三角方程式解集合的求解演練, 比之前期教材, 規則, 限制超多, 師生負擔沉重! 此時授課年級爲高一第二學期, 每週五小時。(約十八週)

3° 實驗教本時期 (民國61年至民國73年)

  1* 認定三角函數乃是數學, 甚至是代數演算之一記號。將細緻的 S.M.S.G 教材精簡, 使雄霸教壇數十年的三角學蛻變成爲代數演算的“工具”。

  2* 懷著邊角的關係去解釋實體世界之測量問題, 處理簡易幾何 (平面幾何) 的證明題、計算題。

  3* 藉由轉化的題材, 將變數變量轉化成 (函數) 圖形與簡諧運動–彈簧振動–圓週運動交錯描述, 顯示: 三角函數事實的實體世界。

  4* 教授年級: 高二自然組, 第一學期每週6小時共四週。

4 現行教本編輯概況

  1* 從直角三角形定義三角函數起步, 再由廣義角與座標幾何結合探討三角形解法, 幾何圖形與測量問題交錯描述, 體會“三角運算”是求解的工具。

  2* 函數圖形描繪側重連續函數、分析函數之演算意味, 爲後續微積分教學、數值處理埋伏佈局。

  3* 除了加強實驗教本代數函數教學外, 強烈的表明三角函數應納入可微函數分析, 強化讀者的數值處理能力, 步驟如下:

    1** 內插法 —比例增值求函數值—高一下教學。

    2** 托勒密函數值表的建立過程(幾何比值, 三角公式演算)。

    3** 泰勒展開式—n 次近似求三角函數值的近似值。(三角函數的微分法)

  4* 使用導函數、遞增函數證明不等關係是本期教材的特色, 如下例: 多項函數與三角函數的不等關係證明: 設 $x > 0$, 求證 $\cos x + \sin x > 1 + x - x^2$ 成立。

早期學生所慣用的“加法律”、“平均數”... 等等老代數的證明方法是艱困的, 今日的高三理科生已可使用遞增函數的特質證明這不等式是成立的, 這是三角函數邁入分析函數教學的成果, 拓展“解題”之領域、智能, 學生的幸福, 我們引以爲傲!

5* 本期教本對公式、定理的處理方式:

1** 基於說明的必要, 當然是建立名詞、定義來溝通, 爲欲演算的便捷形成定理是自然的趨勢, 經常講求功用的教程, 促請讀者檢視全程教義, 終於感受餘弦律是三角函數的明星定理, 爲後續學程—向量解析、座標幾何—鋪出一條高經濟價值的航道, 以此檢測, 終讓讀者辨別老三角習題何者值得學習, 何者不值得推演, 課業負擔終於減輕, 教學之幸!

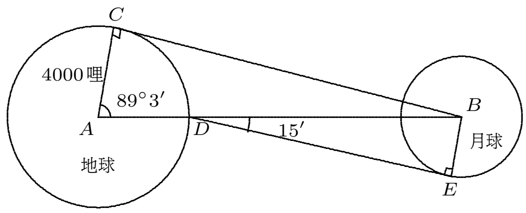
2** 公式教學之驅動程式是功用爲主體的描述, 公式組群之記憶法則不若往昔的誇張, 往往是爲著克服演算上的障礙, 很自然的推出公式讓讀者珍惜, 緊接著促成讀者進一步推演公式去處理新的演算困頓, 享受新工具, 高效率的喜悅和幸福 ! 讀者若能順勢推理, 明白動機與目標, 不必強記整批公式群組即可快樂, 甜蜜的學好三角函數。

參、三角函數的功用

從教本的訴求, 練習題的焦點, 歸納出三角函數的功用, 我們研習動機仍然是體會數學的方法, 檢測三角函數究竟扮演何種角色, 課程已經拓寬, 路程拉長, 從基礎的學習起動, 路要怎麼走, 學習如何開展方能不浪費心智, 有效的達到目標, 下述是以功能爲主體, 扼要說明並反映高中三角基礎教育所能牽涉的功能表達出來, 分述如下:

1° 計算兩星球間之距離

說例: 於下圖中, 一觀察者在 D 點看見月亮正好在頭頂上, 同時另一觀察者在 C 點看見月亮落在地平線上, 因在地表 C 點和 D 點的距離可以知道, 今已知求得 $\angle A=89°3'=\frac{4000}{AB}$



(1)* 兩星球間之距離:

$$\overline{AB}=\frac{4000}{\cos 89°3'}\doteqdot\frac{4000}{0.0166}$$
$$\doteqdot 241000\text{哩}$$

(2)* 後一天文學家用一精確的裝置測出月球中心和月球邊緣所構成的角爲 $15'$, 則月球半徑:

$$\overline{BE}=\overline{BD}\sin 15'$$
$$=(241000-4000)\times 0.0044$$
$$\doteqdot 10.43(\text{哩})$$

1* 本例說明在直角三角形內邊角關係比取得兩星球間的距離, 月球的半徑, 其中邊指邊長, 角指三角函數值。

2* 早期的教材, 甚至今日教本的基礎數學對三角函數值的使用, 非常當然的藉由“三角函數值表” 查出的近似值一筆帶過, 沒有思量這誤差如何控制。

今日的高三理科生就有能力理解, 注意: $\cos 89°3'$, $\sin 15'$ 的函數值求法原理, 誤差控制, 精確度的引用！ 這是教材的變革, 更進一步的說明在本文的第$10°, 11°$ 述說。

2 測量山高:

說例: 某人測得一山峰之仰角爲 $30°$ 後, 他向山前進200公尺, 再測得山峰之仰角爲 $45°$, 可依直角三角形邊角關係求得山高爲 $100(\sqrt{3}+1)$公尺。

1* 本例由練習題中取得, 旨在理解“淺淺的三角函數即有莫大的功力, 推測人力所不能丈量的大自然!

2* 這是傳統的教材, 經歷數十年而不衰的例題, 至今仍爲基礎數學的熱門教材。

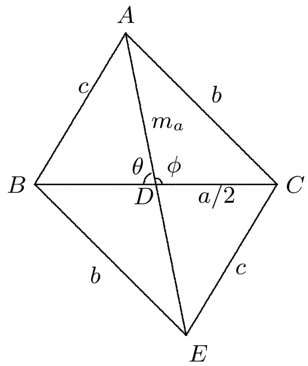
3 餘弦律的功用:

(1) 解三角形: 求頂角、邊長、中線長、投影律。從測量知: 已知二邊與夾角, 第三邊長可由餘弦律求取。

如: 已知 $\triangle ABC$ 中,$a=\sqrt{2}$,$b=1+\sqrt{3}$, $\angle c=45°$, 則第三邊c可由餘弦律求得 $c=2$。

透過餘弦律亦可求得一△ 的中線長。

如下圖$\triangle ABC$ 之中線$\overline{AD}=m_a$。



依圖形所設, 由餘弦律:

$$\cos\theta=\cos(\pi-\phi)=-\cos\phi$$
$$\frac{(\frac{a}{2})^2+m_a^2-c^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot m_a}=\frac{(\frac{a}{2})^2+m_a^2-b^2}{2\cdot\frac{a}{2}\cdot m_a}$$
$$\therefore m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$$

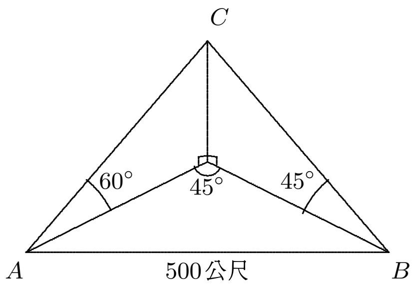
$\cdots$求得中線長。

1* 三角幾何間的互述在實驗本特爲加強, 當時的觀點爲將三角視爲一演算的符號, 從事幾何的運算—量、值的求取工具。

2* 現行教本因爲教程長遠, 對於這方面的述說似有疲於奔命之苦, 不能加重細說, 僅展示功能而已。

(2) 測量氣球高度

說例: 兩人相距500公尺, 同視一氣球, 一人在氣球的 $45°$ 西測得仰角是 $60°$, 另一在氣球的正面測得仰角 $45°$, 則氣球高 ______。



解:(略)。答: $50\sqrt{120+30\sqrt{6}}$

1* 生活上的實例, 促成人們運用習得的三角能力, 應用於日常生活中。

2* 早期高中生不修立體幾何, 在 S.M.S.G 時期引進“空間幾何”, 建立空間圖形的幾何教學, 實驗本時期則非常強調以三角、向量、坐標幾何將傳統的歐氏幾何化解, 改變了三角、代數、幾何的生態, 現行教本亦在此基線上發揮!

(3) 求交角—二直線, 向量的交角, 光學原理。

1* 自從實驗本以三角、向量爲工具聯合破解“歐氏幾何”, 促使雄霸教壇數十年的三角學這獨門學科轉化成一種演算工具, 從此簡化教材, 這種理念改變了國內數學教材編寫的生態!現行教本就是循此理念更進一步以功能原則, 堅守實用, 狹窄的經濟航道, 解說了有關交角的基礎數學, 簡述如次:

1** 由餘弦律推導: 當 $\overrightarrow{a}=(x_1,x_2)$, $\overrightarrow{b}=(y_1,y_2)$ 則

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=x_1x_2+y_1y_2.$$

**二向量交角由定義:
$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta$ 求取。

2** 二直線

$$\begin{cases}\angle 1: a_1x+b_1y=c_1\\ \angle 2: a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$$

之交角:$\cos\theta=\frac{\pm(a_1a_2+b_1b_2)}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$。

3** 空間二直線:

$$L_1: \frac{x-a_1}{l_2}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{3-c}{n_1},$$
$$L_2: \frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2}$$

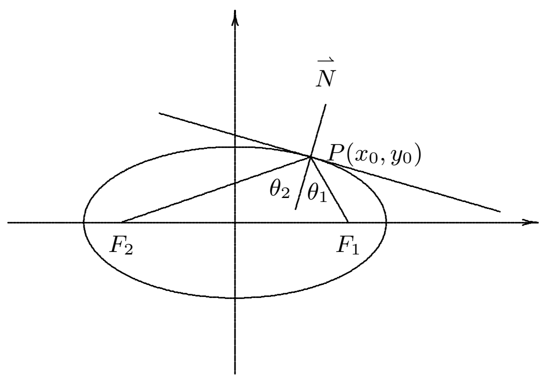
之交角:

$$\cos\theta=\frac{\pm(l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2)}{\sqrt{l_1^2m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$$

4** 空間二平面之交角。(略)

5** 維線之光學性學性質。

在橢圓:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上之一點 $P(x_0,y_0)$ 過點 P 之切線:L : $b^2x_0x+a^2y_0y=a^2b^2$。其法向量: $\overrightarrow{N}=(b^2x_0,a^2y_0)$, 取 $F_1(c,0),F_2(-c,0)$ 如右圖: $\cos\theta_1=\frac{\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{PF_1}}{|\overrightarrow{N}||\overrightarrow{PF_1}|}$, $0<\theta_1,\theta_2<\pi$ $\Rightarrow \theta_1=\theta_2$, 即入射角=反射角。



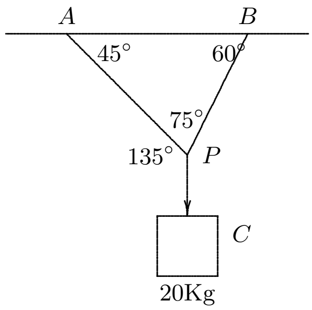
2^* 在這一系列的緊密教程, 可以感受主體教材挺進的航道, 三角是如何扮演這項述說的角色, 從此辨別前後期三角“韻味”的不同, 所謂“簡化教材”的意義已可體會—三角是講“功用”的。

**註: 歐氏幾何至今已被簡化成普通常識或由座標幾何、三角、向量求解, 教材份量減輕。

4° 解釋分量: 力量

“三角、向量間之互述”被引入進高中教材是 S.M.S.G 時期開始, 三角的實用化已然成爲教本編寫的體材, 數理本是一家, 即藉由力學的向量表示、三角演算, 充分顯現！實驗本如此, 現行教本更見發揮。

說例: 如右圖, 一物重 20kg, 用繩子懸掛之, 則: 繩子 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$作用於 P 之力量多力?



解: 正弦律之引用

$$\frac{|\overrightarrow{PC}|}{\sin 105^\circ} = \frac{|\overrightarrow{PB}|}{\sin 30^\circ} = \frac{|\overrightarrow{PA}|}{\sin 45^\circ}$$

可求解 $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{PC}$ 之力量!

5° 扮演參數, 尋求極值

1^* 三角的功用在於它的幾何背景以及數值運算的威力, 能將一般代數式透過三角媒體, 處理幾何問題, 這樣的處置乃是實驗本之強力“訴求”, 成爲後日教學的熱門體材!

說例: 橢圓:$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ 上之一點 P 至直線, $3x + 4y = 12$ 之最短距離 ______。

解: 取橢圓上之點

$$P(x, y) = (2\cos\theta, \sin\theta)$$

代入$3x + 4y = 12$ 中求解。

2^* 轉化雙變數爲單變數的計算, 三角函數功能最爲神勇!

說例: 設 $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + 6xy + 10y^2 = 4$, 求 $3x^2 + 2xy + y^2$ 的最大值, 最小值。

解: 可化解成 $(x+3y)^2 + y^2 = 4$ 在三角恆等式 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 的特殊功能裏; 取:

$$x + 3xy = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta$$

化:

$$\begin{aligned}&3x^2 + 2xy + y^2\\ &= \cdots = 10 - 6\cos 2\theta - 2sin2\theta\\ &\leq 10 + 2\sqrt{10}\end{aligned}$$

可取得: 最大值: $10 + 2\sqrt{10}$, 最小值: $-(10 + 2\sqrt{10})$。

3^* 高中三角在教材不斷的變革中, 觀念上已經把“幾何” “數值”濃烈的韻味溶入成爲代數演算的工具, 這是本國教材編寫芬芳的成果, 足可公諸於世。

6° 以複數之極式解複數$a+bi$的n次方根

1^* 將複數 $a+bi$ 表爲極式:

$$\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

透過笛莫夫定理:

$$\begin{aligned}&[r(\cos\theta+\sin\theta)]^n\\=\ &r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta), n\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

而可將複數 $x+yi$ 的 n 次方根求得:

$$\begin{aligned}z&=x+yi\\&=\sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta+i\sin\theta)\\z_k&=\sqrt[2n]{x^2+y^2}(\cos\frac{2k\pi+\theta}{n}\\&\qquad+i\sin\frac{2k\pi+\theta}{n})\\&\quad k=0,1,2,\ldots,n-1\end{aligned}$$

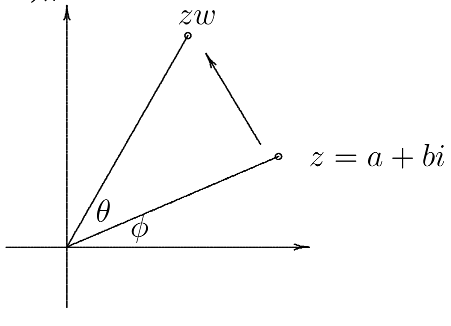
爲所求 n 個 n 次方根。

1^{**} 這道明: 複數的 n 次方根仍爲複數。

2^{**} 複係數 n 次方程式兩根仍爲複數。[代數基本定理], 我們不再擔心是否有超過複數的數是 n 次方程式的根。

2^* 複數的加法在數平面的意義是與向量加法同構, 複數的乘法在複平面意義是點的旋轉、伸張。

如:



$$\begin{aligned}z&=a+bi\\&=r(\cos\phi+i\sin\phi)\\w&=\cos\theta+i\sin\theta\\zw&=r(\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi))\end{aligned}$$

(將點 z 以原點爲心逆轉 θ 而得)
遠在五十四年代的 S.M.S.G 教材已經對此有詳細的說明, 幾乎是複變函數。

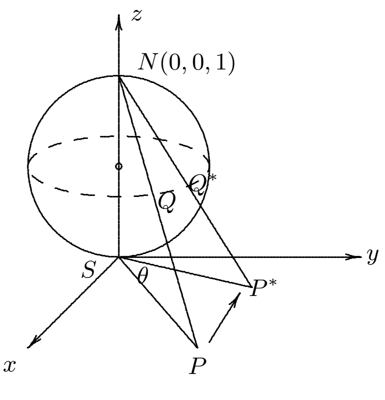
$w=az+b\to a,b$ 爲複常數, w,z 複變量

的前奏, 當時的讀者已是現今的老師皆已知悉這個函數相當於對一個圖形施行旋轉、伸張、平移三種變換。
實驗教本以黎曼球面—球面映射述說。

1^{**} 黎曼球面: $x^2+y^2-z^2-z=0$

2^{**} 複平面: x,y 平面。

3^{**} 複數 $P(x+yi)$ 繞原點 $O(S)$ 轉動 θ 角之映射:



$$z=x+yi\to e^{i\theta}z$$

即$(x,y)\to (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta$
$+y\cos\theta)\cdots$ 三角之功用。

$$\begin{array}{ccc} 點P & \to & 點P^* \\ \downarrow & & \\ (X,Y,Z) & \to & (Z\cos\theta - Y\sin\theta \\ & & , X\sin\theta + Y\sin, Z) \\ Q & & Q^* \end{array}$$

黎曼球面Q點旋轉至Q^*以$\overline{SN}$爲軸。其中 N–Q–P 共線, N–Q^*–P^* 共線, 而 $(X,Y,Z) = (\frac{x}{1+x^2+y^2}, \frac{z}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2})\ldots$球面映射。

$$(x,y) = (\frac{X}{1-z}, \frac{Y}{1-z})$$

三角函數表達複變函數:$w{=}e^{i\theta}z$ 之旋轉意義。

7° 於積分之用途:

1* 恆等式之應用: 如

$$\begin{aligned}&\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}\\ =&\int \frac{2\sec\theta\tan\theta d\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta - 4}}\\ =&\int \frac{2\sec\theta\tan\theta}{2\tan\theta}d\theta\\ =&\int \sec\theta d\theta\\ =&\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C\\ =&\ln|x+\sqrt{x^2-4}| + C\end{aligned}$$

這是令 $x = 2\sec\theta$, $dx = 2\sec\theta \cdot\tan\theta d\theta$

將代數式化做三角等式演算, 可知三角函數眞的是代數式演算的一記號, 媒體。

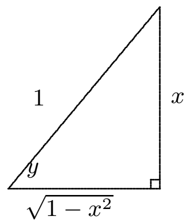
2* 積化和差公式在此亦宣示用途:

$$\begin{aligned}&\int 2\cos x\cos 2x dx\\ =&\int (\cos 3x + \cos x)dx\\ =&\frac{1}{3}\sin x + \sin x + C。\end{aligned}$$

8° 反三角函數在微積分的貢獻。

1* 反函數之規定, 使微分、導數更爲簡捷。

如: 若$y{=}\sin^{-1}x$ (定義: $\sin y{=}x$, 但 $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$), 則 $\frac{d}{dx}y = \frac{d}{dx}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。



說明:

$$\begin{aligned}&\sin y = x\\ &\frac{d}{dx}\sin y = \frac{dx}{dx} = 1\\ &\because \cos y\cdot\frac{dy}{dx} = 1\\ &\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}。\end{aligned}$$

2* 反函數之積分表示:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}(sin^{-1}\frac{u}{a})\\ =&\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{u}{a})^2}}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{du}{dx}\\ \therefore&\int\frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}du\\ =&\sin^{-1}\frac{u}{a}+C\end{aligned}$$

如:$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1)+C$。

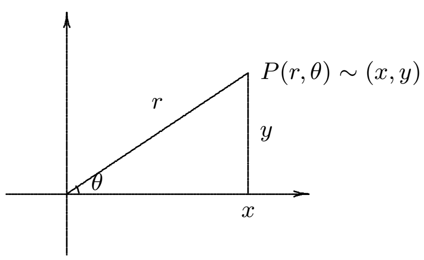
反三角函數非本期教本題材, 不過只要對反三角函數定義下達, 本期教本學生亦能順勢推理得知, 三角函數、反三角函數的介入, 使積分更形方便!

9° 極坐標平面展式曲線方程式之圖形, 它的作用在於積分使面積更易求得。

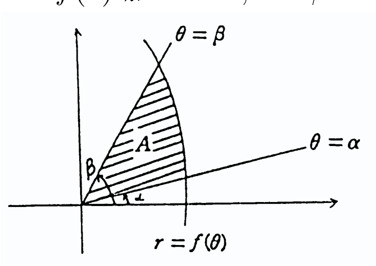
1^* 極坐標表示:

點 P 之極坐標 (r,θ) $\rightarrow$ P 之直坐標 (x,y) 關係式:

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta,$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2} \quad (r>0)$$

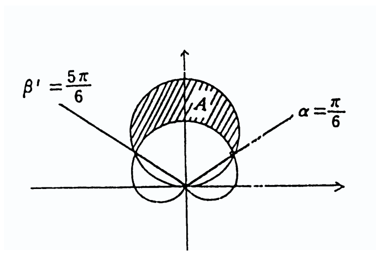


2^* $r=f(\theta)$ 於 $\theta=\alpha,\theta=\beta$



所圍區域面積: $A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2d\theta$

3^* 求心臟線 $r=1+sin\theta$ 之外部與圓 $r=3sin\theta$ 內部之面積。



解:

$$\begin{cases} r=1+\sin\theta \\ r=3\sin\theta \end{cases} \text{之交點}(\tfrac{3}{2},\tfrac{\pi}{6})(\tfrac{3}{2},\tfrac{5\pi}{6})$$

$$A=\frac{1}{2}\int_{\frac{x}{6}}^{\frac{5x}{6}}[(3\sin\theta)^2-(1+\sin\theta)^2]d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{x}{6}}^{\frac{5x}{6}}(4-4\cos2\theta-2\sin\theta-1)d\theta$$
$$\therefore A=\frac{1}{2}(3\theta-2\sin2\theta+2\cos\theta)\Big|_{\frac{x}{6}}^{\frac{5x}{6}}$$
$$=\pi$$

以本期教本之學生而言, 理解此段敍述並不困難, 許是因爲教學時數的限制, 極坐標、柱面坐標並未列入本期教材範圍, 本文提出此段敍述僅在加強“三角函數”之功能之報導– 對積分之重要性, 促使我們對三角函數的學習掌握主旨, 不要偏離航道做無效的演算。

10° 托勒密三角函數值表建立的方法:

1^* 托勒密 (C. Ptolemy 西元二世紀) 不用微積分製成間隔 $30'$ 的正弦函數值表, 其過程如下:

1^{**} 由平面幾何, 求得 $\sin60°$, $\sin72°$ 的近似值 (如下述說例)

2^{**} 使用差角公式求 $\sin12°$。

即 $\sin12°=\sin(72°-60°)=\sin72°\cos60°-\sin60°\cos72°$

3^{**} 從半角公式推得 $\sin 6°$, $\sin 3°$, $\sin 1°30'$, $\sin 45'$,
即 $\sin 6° = \sqrt{\frac{1-\cos 12°}{2}}$ ($\cos 12°$ 由 $\sin 12°$ 開方求得)

4^{**} 內插計算 $\sin 1°$
先知: $\sin 1°30' \doteqdot 0.02618$
$\sin 45' \doteqdot 0.01309$。
由 $1°30' - 1° = \frac{2}{3}(1°30' - 4.5')$
$\sin 1° \doteqdot \sin 1°30' - \frac{2}{3}(\sin 1°30' - \sin 45') \doteqdot 0.01745$。

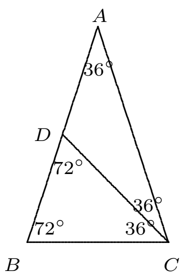
5^{**} 半角公式求 $\sin 30'$

$$\sin 30' = \sqrt{\frac{1-\cos 1°}{2}} \doteqdot 0.00873$$

6^{**} 其他角之正弦函數值如:

$$\begin{aligned}&\sin 2°\\ =&\sin(1°+1°)\\ =&\sin 1°\cos 1° + \sin 1°\cos 1°\\ =&2\cos 1°\sin 1°\end{aligned}$$

7^{**} 間隔 $30'$ 之正弦函數值表— 靠和差角, 倍角公式計算求得。
註*** $\sin 72°$ 之幾何求法:
(i) 如下圖建立 $\triangle ABC$, $\triangle ABC \sim \triangle CBD$



(ii) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}-\overline{BC}}{\overline{BC}} = \frac{1}{\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}} - 1$

(iii) 化簡: $\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2} + \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} - 1 = 0$

(iv) $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos 72° = \cos B = \frac{1}{2}\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

(V) $\sin 72° = \sqrt{1-\cos 72°}$

2^{*} 至此理解三角函數公式群中倍角、半角、和差角、和差化積的學習動機, 原來托勒密是靠這樣的機智, 運用公式耐心的建立三角函數正弦值表, 古人的求值方法眞是令人欽佩!

$11°$ 泰勒展開式求函數值的近以值

1^{*} 原理: 先尋求 $f(x) = \sin x$ 正弦函數的展勒展開式

$$\begin{aligned}f(x) =& x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\\ &+(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\\ &+(-1)^{k}\cdot\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots\end{aligned}$$

2^{*} 其 n 次近似:

$$\begin{aligned}p_n(x) =& x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\\ &+(-1)^{k-1}\cdot\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!},\end{aligned}$$
取 $n = 2k$ or $2k-1$

3^{*} 誤差估計:

$$\begin{aligned}&|\sin x - p_n(x)| = |f(x) - p_n(x)|\\ <&\frac{1}{(2k+1)!}\cdot|x|^{2k+1}, \text{取} n = 2k。\end{aligned}$$

4^{*} 說例: 試由 $p_1(x)$ 求 $\sin 1°$ 的近似值, 並估計誤差。

1^{**} $1° = \frac{\pi}{180}$ 弧度, $p_1(x) = x \Rightarrow p_1(\frac{\pi}{180}) = \frac{\pi}{180} = 0.017452\cdots$

2^{**} 誤差: $|\sin 1^\circ - P_1(\frac{\pi}{180})| < \frac{1}{3!}(\frac{\pi}{180})^2 = 0.000000886\cdots$

3^{**} $P(\frac{\pi}{180})$ − 誤差 $< \sin 1^\circ < P_1(\frac{\pi}{180})$。

即 $0.017452\cdots - 0.000000886\cdots < \sin 1^\circ < 0.017452\cdots$。

$0.017451\cdots < \sin 1^\circ < 0.017452\cdots$。

4^{**} 取 $\sin 1^\circ \doteqdot 0.01745$ (足可證明這近似值的小數點後有五位正確)

*** (托勒密古典求法亦求得 0.01745 的近似值)

計算函數値本非易事, 以近似值取代眞確值, 讓後續的演算更加精密, 是函數求值研究的主因。教本將可微函數化做多項函數的 n 次近似, 藉由誤差的挾擠, 肯定近似值小數點後的正確位數, 表達數值處理方式, 這樣的耐心, 智慧顯示數學嚴肅的修養, 讓我們看到了“數學的方法”領悟了爲何而學, 學而何用的道理。

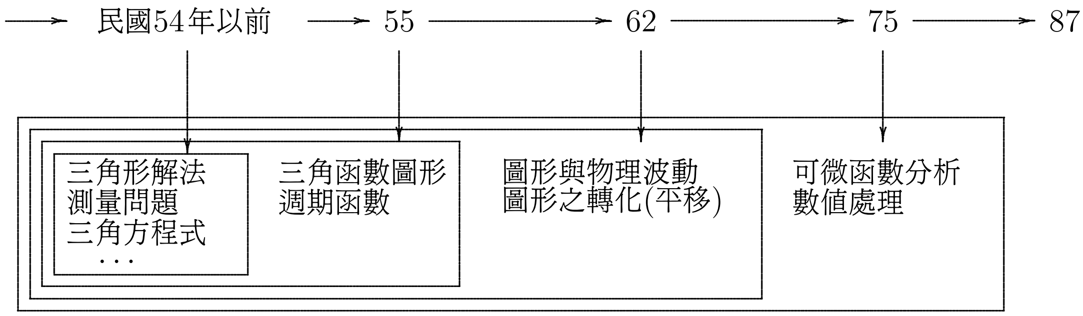
肆、結語

於固有“解題教學”的基礎上, 仔細體會三角函數的實質功能, 後此領悟研習數學的動機與目的, 儲存了熱切的研究能力, 今後順從教本的航道, 拓展更高層次的數學領域, 尤其注重欣賞數學記述的技巧, 證實現象的威力, 並以落實“工具”用途爲使命, 這有效的學習是對生命的尊重, 人生的珍惜!

伍、展望

我們的課程編寫: 從三角形解法、簡易測量、幾何求解、三角方程式 $\cdots$, 拓展成三角函數—週期函數, 圖形描繪至圖形的轉化—物理波動, 到擴充爲可微函數的分析, 數值處理, 這是一段長程之“數學方法”之記述, 猶如修出了一條標準的跑道, 足供巨型飛機安全起降。我們的學生順著教材航道起航, 運用習得的“數學方法”必可航向自我的航天, 如何學習, 如何運用非常的清楚, 對未來科技發展、貢獻已可期待 ! 新課程標準即將訂定, 我們亦知道三角應如何學習, 如何使用新的跑道, 今後不再迷失, 新教材會是更有效的新境界、新航天, 熱烈歡迎新時代的來臨。

附表: 三角函數教材編寫演進圖



—本文作者任教於建國中學—