試論幾何之道

吳柏樟

很榮幸地有此機會在此與大家談談敝人學習數學的方法, 由於筆者擅長領域爲「幾何」, 因此以下就此一專題作較多的陳述。

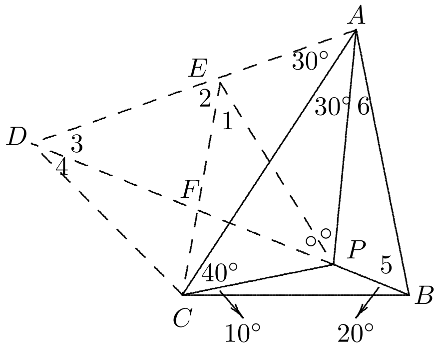
敝人以爲欲極幾何之道, 在「思」, 在「鬥」, 在「博、約、貫」。「思」字, 筆者強調的是「多思」、「常思」。(義近於「一題多解」)。「多思」指的是一道題應不以一種證法爲滿, 而應「時時探求」是否還有其他的證法 (更直接、更無技巧, 亦即更易想到、不會時間一久便忘掉)。尤其是很技巧的證法, 特應尋求其他備用證法。通常, 對於技巧性證法, 我們應朝下面兩方向努力: 第一, 想辦法賦予技巧在思維上較容易被人想到的解釋, 因爲無論再高明的技巧, 對其原創者來說, 不見得是技巧, 因爲他可能是累積了比別人更多的經驗, 融會貫通, 才有那種想法, 而一般人因經驗不夠, 才覺得那是技巧! 舉例來講, 24屆 IMO 第6題: 已知 a, b, c 是三角形的三邊長, 求證: $b^2c(b-c)+c^2a(c-a)+a^2b(a-b) \geq 0$ 當年德國一名選手, 對本題作了如下絕妙的解法, 並因此獲頒特別獎: 因原式循環對稱, 故可設 $a \geq b$, $a \geq c$, 於是,

$$\begin{aligned}\text{原式左邊} &= a(c-b)^2(b+c-a)\\ &\quad +b(a-b)(a-c)(a+b-c)\\ &\geq 0 \quad \text{得證!!}\end{aligned}$$

看! 多麼妙的證法! 一般人只是讚嘆, 可是筆者兩年前參與 IMO 集訓時, 爲了解釋這條式子, 足足花了六個多小時, 用三頁的分析紙, 才參透他的思維: 他將多項函數的概念拿來與不等式相融合! 實在高明之至, 功力之高, 不禁令人讚嘆, 這特別獎實在當之無愧! 而第二種方向便是如上述所談: 想辦法找到其他的證法。唯有朝上述兩方向努力, 才能將別人的證法變成自己的, 不然下次出現類似問題, 還是不會; 死記別人證法, 時間一久終會忘記, 這是不紮實的。而一開始所談這「時時探求」的功夫, 便是吾所謂「常思」的含意。而「鬥」字, 指的是作學問應具備「鬥志」, 挑戰難題, 不向它屈服: 一道題想不出來, 不要輕易看解答, 多想個幾天, 幾個月, 甚至幾年, (附錄中的那道題, 筆者已想了四年, 逾今雖已不再置身數學領域, 可是一有空, 仍不忘拿出來想), 因爲這是訓練思維的一個重要方法, 唯有這樣, 才能進步, 雖然每次想並不能想出來, 但卻可因此獲得許多失敗經驗, 有所增長。至於「博、約、貫」中的「博」, 指的是多閱覽幾何定理、性質, 欣賞其中之美 (對稱、特殊化、一般化—互補之美), 並熟習之, 培養幾何的感覺 (圖形感: 看到一個圖形, 腦中自然浮現它的諸種性質、小定理、常用方法、常作輔助線. . . 等)。如此才能更勝人一籌, 別人不知道的小定理、性質我們卻知道, 於是便比

別人多了幾樣解題工具。而「約」字指的是, 一道問題、定理、性質, 要能掌握它的精華所在, 它到底給了我們什麼經驗、啓示, 它是怎麼被發現的...等, 不要死記其恆等式、定理; 了解中心思想、概念, 更是重要。最後「貫」字, 指的是自己要能從證題經驗中融會, 理出一套完備的思維模式, 每次遇到題目, 便先朝這套系統著手, 如果行不通, 再朝其他方向努力, 而這「其它方向」的基礎便是由前述「思、鬥、博、約」所奠定! 以下舉一個例子來說明「思、鬥、博、約、貫」。

下圖爲一年前教育部全國數學科能力競賽中的一道題: (讀者不妨先看 “已知” 與“求證” 想個十幾分鐘體會、分析。方能對以下證法產生了解, 不然或許看不懂)



圖一

已知: $\angle PCB = 10°$, $\angle PBC = 20°$, $\angle CAP = 30°$, $\angle ACP = 40°$。

試證: $\angle ABP = 60°$。

當年給出的標準解答用的是三角正弦法, 而諸參賽選手似乎也沒人給出純綜合幾何證法。而賽後 (當年筆者已退隱), 我拿到此題, 不相信找不到綜合幾何證法 (『鬥』), 經過一番奮鬥, 給出了如下技巧性證法:

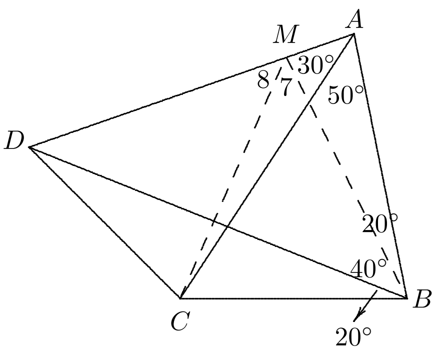
證明:「分析」: (讀者可以一邊看以下證明, 一邊於 (圖一) 上標上導出之諸角度及相等線段, 則將更明瞭證法)

(1) 作 $\angle CAD = 30°$, 交 $\overline{BP}$ 延長線於 D 點, 並連接 $\overline{CD}$。

(2) 作 $\angle APD$ 之內角平分線交 $\overline{AD}$ 於 E 點, 並連接 $\overline{CE}$。

(3) 易知 $\angle APE = \angle EPD = 40°$, 於是 $\overline{PC}$ 爲 $\angle APE$ 之外角平分線, 又 $\overline{AC}$ 爲 $\angle PAE$ 之內角平分線, 故得 C 點爲傍心 $\Rightarrow$ $\overline{CE}$ 平分 $\angle PED$ $\Rightarrow$ $\angle 1 = \angle 2 = 50°$, 同時由 $\triangle ADP$ 知 $\angle 3 = 40°$ 故 $\triangle DEF \cong \triangle PEF$ (AAS) $\Rightarrow$ $\overline{CE}$ 爲 $\overline{PD}$ 之中垂線 $\Rightarrow$ $\angle 4 = \angle DPC = 30°$ $\Rightarrow$ $\angle DCA = 80°$, 緊接著「只」觀察 D、C、A、B 四點 (亦即四邊形 $ABCD$ 及其兩對角線), 由於 $\angle 3, \angle 4, \angle DCA, \angle ACB$ 已確定, 故各角度與此圖便惟一確定, 接著「逆向思考」, 更改已知條件爲:「已知 $\angle CBD$, $\angle DBA$, $\angle BAC$, $\angle CAD$ 爲已知, 分別爲 $20°, 60°, 50°, 30°$, 求證 $\angle BDC = 30°$」再由「同一法」[註:「同一法」指的是四邊形 $ABCD$ 與其對角線所夾之角度, 若出現四個決定性角度, 則其餘角度可被推出而唯一確定, 同時此四邊形亦唯一確定]可證原題!!

新命題證如下:



證明: 作 $\angle DBM = 40° \Rightarrow \angle MBA = 60° - 40° = 20°$

(1) 觀察到 $\triangle BAM$ 爲等腰 $\Rightarrow \overline{BM} = \overline{BA}$

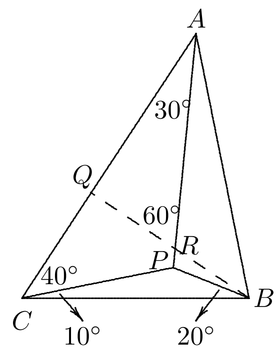
(2) 觀察到 $\triangle CAB$ 爲等腰 $\Rightarrow \overline{CB} = \overline{BA}$

(3) 由 (1)(2) 知 $\overline{CB} = \overline{BM} \Rightarrow \triangle CBM$ 爲正 $\triangle$ $\Rightarrow \angle 7 = 60°$ 又 $\angle AMB = 80° \Rightarrow \angle 8 = 40°$ 又觀察到 $\triangle BDM$ 爲等腰 $\Rightarrow \overline{DM} = \overline{MB}$ 又 $\triangle BCM$ 爲正 $\triangle \Rightarrow \overline{DM} = \overline{MC}$ 又 $\angle 8 = 40°$ 故 $\angle MDC = 70° \Rightarrow \angle CDB = 30°$。

上述看似十分技巧的證法, 對筆者來說其實不然, 因筆者早已十分熟悉新命題內各角度的分布、關係, 以及新命題的性質。故原命題輔助線的做法, 完全是朝此一方向假設所造出, 並非神來之筆, 這種功夫即是所謂『博』的好處! 不過後來筆者想想, 萬一我並不知曉新命題此一性質, 應當如何呢? 是否有新解? (『思』), 於是三天後, 給出了另一種證法:

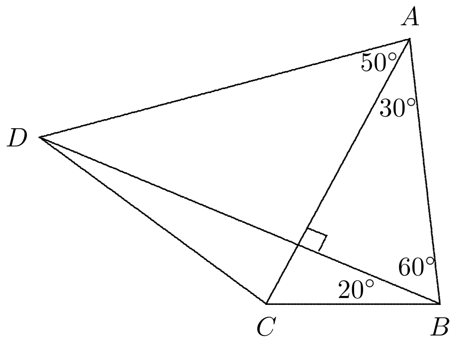
證明: 原命題等價於證明 $\triangle ABC$ 爲等腰 ($\overline{AB} = \overline{BC}$), 於是"自然地"作 $\overline{BQ} \perp \overline{AC}$, 想辦法證明 $\overline{AQ} = \overline{QC}$!! 又觀察到 $\angle RBP = 20°$, 而 $\angle BRP = 60°$, 於是對於 $\triangle BCR$ 及其內 P 點, 所成的各角度便唯一確定!! 又易知對於另一個 $\triangle B'C'R'$ (三內角爲 $40°, 20°, 120°$)(讀者請自行於空白處畫出另一 $\triangle B'C'R'$) 及其內心 P', 所構成的圖形角度關係, 與 $\triangle BCR - P$ 相似, 故知 $\angle CRP = 60°, \therefore \angle CRQ = 60° = \angle QRA$, $\therefore \triangle ARQ \cong \triangle CRQ \Rightarrow \overline{AQ} = \overline{QC}$ (得證)

而由上述證明過程中 亦可得其精髓在於 $\triangle BRC$ 及其內心與 $\triangle B'R'C'$ 及其內心之間角度變換關係, 還有「唯一確定」這四個關鍵字, 此即吾所謂「約」, 而整個分析系統即是「貫」!!



結論: 以上即爲我個人在幾何領域的小心得, 其實不管在任何領域, 這五個字, 我以爲均是作學問、作研究的必備態度, 蓋嘗試論之, 望能對有志之士有所裨益!! 至於 IMO 參賽心情、集訓記趣, 檢討與建議, 限於篇幅, 不再多述。在此謹以最高的謝意向諸位集訓的指導敎授、以及我的高中老師—黃重嘉老師, 還有賦予我這些概念的中研院葉永南敎授和國中啓蒙恩師黃錦宗老師 ··· 表達感謝之意。此外各項 IMO 行政人員以及期間給我精神支持者亦值得感謝!! 以此作結!

附錄題: 試以綜合幾何法 (不用三角函數), 定出 $\angle BDC$ 之度數



編者註: 其他同屆參賽國手給作者一個“吳幾何”的外號, 顯示其綜合幾何之超人一籌, 37屆 IMO 僅出現一題絕難的幾何三角綜合題, “吳幾何”也未能順利解出, 加之以印度七月超壞之惡劣氣候及飲食不適當而病倒, 未獲獎牌而僅獲得榮譽獎殊屬遺憾, 惟就本文中顯見 IMO 之經驗對其影響之深, 即如現在就讀醫學系, 仍然念念不忘 IMO 之經驗。

作者回應: 關於文末「編者註」一段話, 敝人以爲實在是過獎了! 余只是對幾何領域有較濃厚興趣, 平日喜好沈浸其中, 讓思維恣意翺翔, 如此而已。而對於「吳幾可」此一稱號, 實在擔當不起! 何況吾之 IMO 同屆戰友中, 亦不乏其中之佼佼者, 獨受此一稱號, 實在當之有愧。此外, 此稱號乃余於今見此文方知, 平日集訓之時, 從未以此相稱。「由來只有張代數, 有誰聽過吳幾何?」望深察之!

此外關於 IMO37屆以一分之差未獲獎牌一事, 惡劣氣候及飲食固屬影響因素之一, 而主因實乃余之心理壓力過大, 睡眠不良, 造成嚴重殺傷力, (考試時間長達4.5小時), 以致思維無法充分發揮所致。重之以絕難之幾何不等式一題, 與之纏鬥多時未果, 賽後證實其輔助線作法實在技巧之至, 全世界四百多名參賽選手, 竟僅六人完整解出 ··· 致使余抱憾 ··· 此與「編者註」所談, 有所出入!

～ 新數學蝴蝶夢 ～ (丁丑元宵有感)
數學像那東流水　離我遠去不可留
醫學亂我心　多煩憂
抽刀斷水水更流　舉杯消愁愁更愁
明朝醫學似飄流
由來只有張代數　有誰聽過吳幾何
醫學這條路　好辛苦
想要回首向幾何　無奈天命不可違
命運枷鎖誰擺脱
看好似無怨無悔
不應該的年代
可是誰又能
擺脱人世間的悲哀
現實世界　數學幾何?
在此生已是空
何苦又再眷戀
不如一笑置之

—本文作者現就讀於中國醫藥學院醫學系—