關於 $n^{n+1}>(n+1)^n$ 的證明及其應用

宋秉信

每當新的一年來臨之際, 我們常常會遇到以年代號碼爲數據, 編製出各種有趣的數學問題。這類題可作爲習題用, 也可作爲數學競賽用。還可作爲課外活動競猜之用。今年年初我就遇到了這樣一道數學競猜題: 比較 1997^{1998} 與 1998^{1997} 的大小。年年如此, 每年都有新題目。爲徹底解決這類問題, 本文準備就"比較 n^{n+1} 與 $(n+1)^n$ 的大小" 問題進行深入的研究。

一、n^{n+1} 與 $(n+1)^n$ 的比較

當 $n=1$ 時, 顯然 $1^{1+1}<(1+1)^1$。

當 $n=2$ 時, 有 $2^{2+1}<(2+1)^2$。

$\therefore$ 當 $1\le n<3$, n 爲整數時, $n^{n+1}<(n+1)^n$。那麼, 當 $n\ge 3 (n\in N)$ 時的情況怎樣呢?

定理: 當 $n(\ge 3)\in N$ 時, 有不等式

$$n^{n+1}>(n+1)^n. \qquad \text{(I)}$$

證明 (一): 用數學歸納法證。

當 $n=3$ 時, $3^4>4^3$。原不等式成立。

假設 $n=k$ 時, 原不等式立, 即有

$$k^{k+1}>(k+1)^k \qquad (k\ge 3) \qquad (1)$$

當 $n=k+1$ 時, 因

$$\frac{(k+1)^{(k+1)+1}}{[(k+1)+1]^{k+1}}=(k+1)(\frac{(k+1)}{k+2})^{k+1} \qquad (2)$$

$\because k^2+2k+1>k^2+2k$, 即 $\frac{(k+1)^2}{k+2}>k$。

$\therefore \frac{k+1}{k+2}>\frac{k}{k+1}$。

由 (2) 得

$$\frac{(k+1)^{k+2}}{(k+2)^{k+1}}>(k+1)(\frac{k}{k+1})^{k+1}=\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k} \qquad (3)$$

由 (1) 得 $\frac{k^{k+1}}{(k+1)^k}>1$

$\therefore \frac{(k+1)^{k+2}}{(k+2)^{k+1}}>1$。即 $(k+1)^{k+2}>(k+2)^{k+1}$。這就是說, 當 $n=k+1$ 時, 原不等式也成立。

綜上可知, 對於 $n\ge 3$ 的任意自然數n, 不等式 $n^{n+1}>(n+1)^n$ 總是成立的。

證明 (二): 用二項式定理證。

$\because$ 當$n\ge 3$時, 有

$$(n+1)^n$$
$$=n^n+C_n^1n^{n-1}+C_n^2n^{n-2}$$

$$+C_n^3 n^{n-3}+\cdots$$
$$+C_n^{n-2}n^2+C_n^{n-1}n+1$$
$$=n^n$$
$$+\underbrace{(C_n^1 n^{n-1}+C_n^2 n^{n-2}+\cdots+C_n^{n-2}n^2)}_{\text{共}(n-2)\text{項}}$$
$$+(n^2+1)$$

其中 $C_n^k n^{n-k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}n^{n-k}\leq n^k\cdot n^{n-k}=n^n$ $(1\leq k\leq n-2)$。

$\therefore$ 當$n\geq 3$ 時, 有

$$(n+1)^n\leq n^n+\underbrace{(n^n+n^n+\cdots+n^n)}_{\text{共}(n-2)\text{項}}$$
$$+n^2+1$$
$$=(n-1)n^n+n^2+1$$
$$<(n-1)n^n+n^n$$
$$=n\cdot n^n=n^{n+1}。$$

證明 (三): 用極限方法證。

$\because$ 數列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 當 $n\to\infty$ 時, 是單調遞增地趨於數 e, 即 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\approx 2.7182818\cdots$

故當 $n\geq 3$時, 有

$$(1+\frac{1}{n})^n<e<n。$$

由此可知, $\frac{(n+1)^n}{n^n}<n$。即

$$(n+1)^n<n^{n+1}。$$
$$\therefore n^{n+1}>(n+1)^n \qquad (n\geq 3)。$$

通過以上各種證明, 我們已得出對於 $n\geq 3$ 的自然數 n, 都有 $n^{n+1}>(n+1)^n$ 成立。下面我們想將此結論加以推廣。

二、推廣

對於任意給定的自然數 n_0, 又如何比較 n_0^{n+1} 與 $(n_0+1)^n$ 及 $(n+1)^{n_0}$ 與 n^{n_0+1} 的大小呢?

假定 $n_0\geq 2$ 是給定的自然數, 因

$$\log_{n_0}(n_0+1)^n-\log_{n_0}n_0^{n+1}$$
$$=\log_{n_0}\frac{(n_0+1)^n}{n_0^{n+1}}=\log_{n_0}\frac{1}{n_0}(\frac{n_0+1}{n_0})^n$$
$$=n\log_{n_0}(\frac{n_0+1}{n_0})+\log_{n_0}\frac{1}{n_0}$$
$$=n\log_n(1+\frac{1}{n_0})-\log_{n_0}n_0$$
$$=n\log_{n_0}(1+\frac{1}{n_0})-1。$$

$\therefore$ 當 $n<\frac{1}{\log_{n_0}(1+\frac{1}{n_0})}$ 時, $\log_{n_0}(n_0+1)^n<\log_{n_0}n_0^{n+1}$。由於 $n_0\geq 2>1$ $\therefore$ 函數 $\log_{n_0}A$ 單調遞增, $\therefore$ 即 $(n_0+1)^n<n_0^{n+1}$。同理當 $n>\frac{1}{\log_{n_0}(1+\frac{1}{n_0})}$ 時,

$$\log_{n_0}(n_0+1)^n>\log_{n_0}n_0^{n+1},$$
$$\text{即}(n_0+1)^n>n_0^{n+1} \qquad \text{(II)}$$

當 $n=\frac{1}{\log_{n_0}(1+\frac{1}{n_0})}$ 時, $\log_{n_0}(n_0+1)^n=\log_{n_0}n_0^{n+1}$, 即 $(n_0+1)^n=n_0^{n+1}$。

實際上, 當 $n_0\geq 3$ 時, 由於 $n_0^{n_0}\geq 3^{n_0}>e^{n_0}$。

$$\therefore \frac{(n+1)^{n_0}}{n^{n_0+1}}=\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})^{n_0}$$
$$=\{[(1+\frac{1}{n})^n]^{n_0}\}^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$

$$\because (1+\frac{1}{n})^n<e,\ \therefore \frac{(n+1)^{n_0}}{n^{n_0+1}}<(e^{n_0})^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}。$$

因對於任意給定的自然數 $n_0\geq 3$, n_0 能滿足條件 $n^n>e^{n_0}$, 所以有

$$\frac{(n+1)^{n_0}}{n^{n_0+1}}<(e^{n_0})^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}<(n^n)^{\frac{1}{n}}\frac{1}{n}=1$$

$$\therefore (n+1)^{n_0}<n^{n_0+1}。\qquad \text{(III)}$$

三、進一步探索

當變量 n 是連續變化時, 上面所討論的結論是否仍成立? 具體來說, 如果設 x 是正的實變量, 那麼

$$x^{x+1}<(x+1)^x \qquad x\in(0,3),$$
$$x^{x+1}>(x+1)^x \qquad x\in[3,\infty)。$$

是否還存在一個正數 k, 使得

$$x^{x+1}<(x+1)^x \qquad x\in(0,k),$$
$$x^{x+1}>(x+1)^x \qquad x\in[k,\infty)。$$

我們用微分法對上述問題進行討論:

由於$x^{x+1}>(x+1)^x\Leftrightarrow x^{\frac{1}{x}}>(x+1)^{\frac{1}{x+1}}$。設 $y=x^{\frac{1}{x}}\quad x\in(0,\infty)$。

$$\because \ln y=\frac{1}{x}\ln x,\quad \therefore \frac{y'}{y}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$
$$\therefore y'=y\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}$$

當 $1-\ln x>0$, 即 $\ln x<1$, 亦即 $0<x<e$ 時, $y'>0$, 當 $1-\ln x<0$, 即 $\ln x>1$, 亦即 $x>e$ 時, $y'<0$。

因此, 當$x\in(0,e)$時, 函數 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 是增函數。當 $x\in(e,+\infty)$ 時, 函數 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 是減函數。於是, 我們把 (一) 中的結論推廣爲:

$$當x\in(0,e)時,\ x^{x+1}<(x+1)^x,$$
$$當x\in(e,+\infty)時,\ x^{x+1}>(x+1)^x。\qquad (IV)$$

由上面的討論, 我們從函數 $y=x^{\frac{1}{x}}$ 的單調性, 還可得出更一般的結論。

$$當\ a>b>e時,\ 有a^{\frac{1}{a}}<b^{\frac{1}{b}},即a^b<b^a。$$

$$當\ 0<b<a<e時,\ 有\ a^{\frac{1}{a}}>b^{\frac{1}{b}},\ 即\ a^b<b^a。\qquad (V)$$

四、應用

由於有了上述判別公式, 那麼對於比較 1997^{1998} 與 1998^{1997} 的大小, 這樣的問題就比較容易解決了。由於 $n=1997>3$。所以知 $1997^{1998}>1998^{1997}$。

如果誰問你 1999^{2000} 與 2000^{1999} 那個大。你可立刻回答他: $1999^{2000}>2000^{1999}$。因爲 $n=1999>3$。

例1: 試比較下列各數的大小:

(1) 500^{1996} 與 499^{1997},

(2) $1111^{1111}\times 5555^{4444}$ 與 4444^{5555}。

解: (1) $500^{1996}=(499+1)^{1996}$, $499^{1997}=499^{1996+1}$。設 $n_0=1996$, $n=499$, 顯然有 $1996^{1996}>3^{1996}>e^{1996}$, 且 $n_0=1996>3$。

$$\because n^n=499^{499}>e^{1996}=e^{4\cdot 499}=e^4\cdot e^{499}$$

$$\therefore 由公式\ \text{III}\ 知\ 499^{1997}>500^{1996}。$$

(2) 因爲

$$\frac{1111^{1111}\times 5555^{4444}}{4444^{5555}}$$
$$=(\frac{1111}{4444})^{1111}\cdot(1+\frac{1111}{4444})^{4444}$$
$$=(\frac{1}{4})^{1111}\cdot[(1+\frac{1}{4})^{4}]^{1111}$$
$$<(\frac{e}{4})^{1111}<1。$$

$\therefore 1111^{1111}\times 5555^{4444}<4444^{5555}$。

例2: 比較 1998^3 與 3^{1998} 的大小。

解: 設 $a=1998$, $b=3$, 由於 $a>b>e$, 根據公式 V 知, $a^b<b^a$, 即 $1998^3<3^{1998}$。

也可這樣解:

$\because\ \log 1998^3=3\log 1998=3\log(3^7-189)<21\log 3<1998\log 3=\log 3^{1998}$。

$\therefore 1998^3<3^{1998}$。

參考文獻

1. 明知白: 關於1983^{1984} 與 1984^{1983} 大小的比較—培養學生 "實驗、猜想、論證"能力一例。數學通報 1(1984), p18-19。
2. 朱霞光: 數 e 在證明不等式中的一些應用。數學通報 5(1987), p13-14。

—本文作者任教於中國湖南省湘潭教育學院—