藉題發揮 得意忘形

葉東進

幾天前, 應一位親戚之邀, 回南部參加他女兒的訂婚禮, 按當地習俗, 請來廚師, 就著住家附近巷道, 做起外燴, 宴請賓客。酒席內容, 山珍海味, 材料道地, 面子十足。吃喝之間, 只見佳餚美食, 一道端上, 尚未用完, 緊接一道, 不多一會, 桌面已擺滿四五道菜, 此時衆家賓客, 美味當前, 不見評頭論足, 讚賞喝采, 卻只自顧埋頭苦幹, 吃著, 塞著, 過不多久, 便見前面幾道菜已現盤底, 而廚師們也顧不著食客的消化與否, 反倒新的料理仍是一盤又一盤的端上又更替, 到得後來, 盤中美食, 有些僅被淺嚐幾口, 有些稍被翻動, 有些甚至到席散仍是原封不動, 實在可惜, 眞是糟蹋。原先滿腹的食慾, 被脹滿的壓迫感取代, 開始時想像美味的期待, 換得的是宴後的一種負擔。這種不舒服的經驗, 其實在許多的宴飲場合是屢見不鮮的, 它是台灣的文化之一。

飲食文化, 也深深地影響教學的內容, 俗又大碗是其一, 急就章草草結束是其二。口中狼吞虎嚥, 肚裡塞著撑著, 最後消化不良, 再沒一點味口, 這不只是飲食現象, 也是教學寫照。

要教學雙方都能享有美好經驗, 內容的質量選取, 過程的推進安排都須用心與智慧。優質的教學, 如同健康的飲食, 不是比量多, 是求質精; 不是比進度, 是求深刻。

怎麼做呢? 我提出兩點:

一是藉題發揮

一是得意忘形

藉題發揮是指藉一道問題的解決, 在過程中, 教師提出幾個相關的子問題, 透過師生的互動、討論、思辨而逐漸釐清問題, 契近問題核心, 擬出解題策略, 最後甚至擴展問題, 加以發揮。這些子問題主要在幫助學生 (1) 觀察問題, 搜尋經驗 (2) 明白問題, 找出因果 (3) 看淸問題, 激發想像。

而得意忘形, 是指教師在新題材的介紹上, 強調內容的意義及方法的運用, 在過程中, 提供機會, 以活動學生的舊有知識及經驗, 避免教學落入證明公式、記憶公式、代算公式的形式中。

底下用兩個例子說明上述觀點。

例 1: 試證明

$$16\cos^5\theta=\cos 5\theta+5\cos 3\theta+10\cos\theta$$

(此一問題出自牛頓版, 高中基礎數學第二冊, p.206。問題出現之前, 課本有提及: 設 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$, $n \in \mathbb{Z}$, 則 $\alpha^n + \alpha^{-n} = 2\cos n\theta$, $\alpha^n - \alpha^{-n} = 2i\sin n\theta$)。

對此問題, 教師如果僅僅急著要去講解課本上的解法 (註), 草草結束, 沒有什麼聯想, 不作任何發揮, 實在可惜, 眞的糟蹋。要求精緻, 要談建構, 教師這時候不妨使用下列提問的方式引導學生進行思考、聯想、整理及思辨:

請你們把這個待證的等式仔細多看幾遍, 作番觀察。

發現什麼嗎?

等式左邊是 $\cos\theta$ 的五次方, 右邊呢? 右邊怎麼說?

是 $\cos 5\theta$, $\cos 3\theta$ 與 $\cos\theta$ 的一次組合, 是不是?

另外還發現什麼嗎?

注意到係數間的關係了嗎? 看到係數間的關係 $16 = 1 + 5 + 10$ 以及 $1, 5, 10$ 這三個數的排序, 聯想到什麼嗎?

它只是一種巧合嗎? 或者可能是某一規律的顯示呢?

能不能找一個更簡單的等式, 它也顯示類似的規律呢? 我的意思是比如左邊要是 $\cos^3\theta$ 的話, 這時等式會是什麼呢?

是不是 $4\cos^3\theta = \cos 3\theta + 3\cos\theta$?

這個式子是眞確的嗎?

它跟你們學過的三倍角公式有關嗎?

它就是餘弦的三倍角公式, 對不對? 所以它是眞確的囉!

這樣看來, 似乎是眞有一個規律存在!?

我們一起來猜想看這一規律大概是什麼樣子。

有什麼譜嗎?

如果等式左邊是 $\cos^7\theta$ 的話, 按照你們心中猜想的規律, 這個等式是什麼?

$64\cos^7\theta = \cos 7\theta + 7\cos 5\theta + 21\cos 3\theta + 35\cos\theta$, 對嗎?

你能確定上面的等式是眞確的嗎?

還不能! 對不?

如果眞是成立的話, 把 θ 取一特定的值代入左右兩邊, 分別計算求值, 兩者應該相等才是, 否則就可以說等式是不眞確的, 對嗎? 這確是一個檢驗的好主意!

比如取 $\theta = 60°$, 大家算看看。

結果怎樣? 兩邊的值果然相等, 是不? 你因此可以說等式是眞確的嗎?

不能! 對的, 我們還不能因此就說等式是眞確的, 但是經由剛才的檢驗, 你們更加相信等式是眞確的, 是嗎?

雖然, 我們現在還沒有工夫去確定這些等式是否眞確, 不過, 叫人鼓舞的是, 大家經由對原先問題的觀察, 似乎已經發現了一個一般性的規律, 這實在太好了。

當然, 如何把這個規律用一個數學式子明確表示, 並且給予證明, 是後續的重要事情。可是別急, 大家要是稍加想像的話, 在目前, 這可不是件容易的事, 待我們回到最開始的那道問題上, 看看有些什麼可能的證明方法, 解決之後, 再來談一般性的問題, 說不定心中就會出現較好的點子。

開始的問題是要證明

$$16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$$

依你們以往的經驗, 是從左邊證往右邊呢? 或是從右邊證往左邊較爲方便?

從以簡御繁, 化繁爲簡的策略來看, 應該是從右邊證往左邊較好吧?

很好, 所以左邊的 $\cos^5\theta$ 就是你們要證明的目標, 請大家看清楚, 它是 $\cos\theta$ 的一個五次單項式; 至於右邊呢? $\cos 5\theta$, $\cos 3\theta$ 跟 $\cos\theta$ 有什麼關係嗎?

$\cos 3\theta$ 可以寫成 $4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, 而 $\cos 5\theta$ 嘛, 應該也可以寫爲 $\cos\theta$ 的五次多項式!?

怎麼說呢?

因爲把和角公式 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ 中的 α 看成 3θ, β 看成 2θ, 再利用已知的二倍角、三倍角公式就行了。

不錯, 大家就演算看看。

結果呢?

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

很好!

到這裡, 我們暫且走岔一下。不知道你們有沒有注意到 $\cos 2\theta$, $\cos 3\theta$ 可以分別表爲 $\cos\theta$ 的二次及三次多項式, 而今, $\cos 5\theta$ 也可以表爲 $\cos\theta$ 的五次多項式, 是不是因此推想: $\cos\theta$ 可以表爲 $\cos\theta$ 的 n 次多項式呢? 事實上, 這件事是對的, 建議你們回去後想想看, 能不能用數學歸納法證明? 這證明中間可能還會涉及到 $\sin n\theta$ 是否可以表爲 $\sin\theta$ 的 n 次式及一些其它的問題, 總之, 還滿複雜的。這是一個節外生枝的問題, 不是這裡的三兩句話可以交待清楚, 有興趣的話研究看看就是了。

現在, 還是回到原來的問題上。

既然 $\cos 5\theta$, $\cos 3\theta$, $\cos\theta$ 都是 $\cos\theta$ 的多項式, 所以從右邊證往左邊這件事, 其實只不過是把 $\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$ 化簡成 $\cos\theta$ 的多項式, 看看結果是不是 $16\cos^5\theta$ 罷了。

所以諸位已經看到, 證明並不困難, 只須先把問題的意涵搞清楚。

不過, 要提醒你們注意的一個有趣問題是, 那些係數 $1, 5, 10$ 是怎麼發現的? 爲什麼不是其它的數呢?

證明是一回事, 發現等式又是一回事。

改換一個角度來看, 要是想從等式的左邊證往右邊, 便相當於如何把 $\cos^5\theta$ 表爲 $\cos 5\theta$, $\cos 3\theta$ 與 $\cos\theta$ 的一次組合, 而這也算是一種以簡御繁的觀點, 因爲, 五次的東西用一次的組合表示。

前面已經學過, 如果取 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$, 就有 $\alpha^n + \alpha^{-n} = 2\cos n\theta$, 因此,

$$\begin{aligned}\cos^5\theta &= \left(\frac{\alpha+\alpha^{-1}}{2}\right)^5\\ &= \frac{1}{32}(\alpha^5 + 5\alpha^4\alpha^{-1} + 10\alpha^3\alpha^{-2}\\ &\quad +10\alpha^2\alpha^{-3} + 5\alpha\alpha^{-4} + \alpha^{-5})\\ &= \frac{1}{32}[(\alpha^5+\alpha^{-5}) + 5\alpha\alpha^{-1}(\alpha^3+\alpha^{-3})\\ &\quad +10\alpha^2\alpha^{-2}(\alpha+\alpha^{-1})]\end{aligned}$$

但是 $\alpha\alpha^{-1} = 1$

$$\therefore \cos^5\theta = \frac{1}{32}(2\cos 5\theta + 10\cos 3\theta + 20\cos\theta)$$

也就是 $16\cos^5\theta = \cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta$

對上面的證明, 你們有什麼感覺?

有沒有些許的感動?

原本是一個三角的問題, 但是通過複數這一條新的路徑, 證明竟顯得如此簡潔。是不是叫人著迷?

還有, 這樣的證明又帶給我們什麼其它的啓發? 是不是同樣的方法, 都可以讓我們找到 $\cos^{2n+1}\theta$ 的有關等式? $\cos^{2n}\theta$ 又如何? 甚至 $\sin^n\theta$ 呢? 這些問題就留給你們好好的想一想, 仔細的做一做。

千言萬語要交待的是, 只有通過解題的實踐, 才有機會整合你們的知識, 融會貫通, 形成網絡, 產生有效的經驗。

例2: 於空間中, 證明點 (x_0, y_0, z_0) 到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距離爲

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

這個例子, 是每一課本, 每一教材在介紹空間向量與空間平面時, 都會提到的一個公式, 本無新奇, 不過, 僅僅把它視爲一個公式, 教它的證明, 之後, 舉個實例, 代入計算, 便就結束, 是相當可惜的。因爲透過這個問題的出現, 教師在完成它的證明的介紹之前, 可以用一些子問題向學生釐清「距離」這一概念, 過程中整合他們的某些知識, 讓學習的經驗流動而不凝阻, 避免教學落入一種只是證明、代公式、演算的形式中。

教師或許可以如下提問:

你們曾經學過哪些跟距離有關的事情?

點與點, 還有呢?

還有平面上, 點與直線。

就是指這個距離公式 $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 嗎?

這個公式怎麼來的, 知道嗎?

$\cdots\cdots$

忘了?

沒關係, 讓我們耐心地從頭開始。

能不能告訴我, 什麼叫距離?

$\cdots$, 距離就是線段長。

什麼樣的線段?

最短線段!

你說的最短, 能不能把它的涵意說清楚?!

就是說兩個圖形間可能連接的線段中最短的。

說的非常好, 如果用 $\min\{\overline{PQ}|P\in S_1, Q\in S_2\}$ 表示圖形 S_1, 與 S_2 間的距離, 是不是把你的意思表達得更明確?

這樣說來, 兩點 A, B 間的距離就是唯一的 $\overline{AB}$ 了。

而如果平面上, 給點 $P(2,-1)$ 及直線 $\ell: 3x-y-2=0$, 那麼 P 與 ℓ 的距離就是 $d(P,\ell)=\min\{\overline{PQ}|Q\in\ell\}$, 怎麼求這一個距離呢?

Q 是 ℓ 上的動點, 怎麼表示 Q 的位置呢?

用坐標!

對的, 但怎麼表示呢? 就說 $Q=(x,y)$ 行嗎?

不行。

爲什麼?

因爲這樣的表示, 沒有把 Q 落在直線 ℓ 的這一事實呈現出來, 應讓寫成 $Q=(x, 3x-2)$ 才是。

很好! 因此這時候, 我們看到 $\overline{PQ}^2$ 是跟著 Q 的位置而變動, 也就是隨著 x 的值而變

動, 這之間的變動, 我們可以用下面的式子表現出來:

$$\overline{PQ}^2=(x-2)^2+(3x-1)^2$$

現在, 我們的目標變成如何求上面一式的最小值, 這是你們已經熟習過的問題不是嗎? 怎麼做?

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2&=10x^2-10x+5\\&=10(x-\frac{1}{2})^2+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

所以 $\overline{PQ}$ 的最小值就是 $\frac{\sqrt{10}}{2}$, 隨之, P 與 ℓ 的距離等於 $\frac{\sqrt{10}}{2}$

如果順便想知道在 $\overline{PQ}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ 時, Q 的位置, 也就是 Q 的坐標, 怎麼辦呢?

因爲是當 $x-\frac{1}{2}=0$ 時, 才取得 $\overline{PQ}$ 的最小值, 這時 $Q=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$。

是的, 那麼再問: 這時候的 $Q=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ 確是點 P 在 ℓ 的投影嗎? 也就是 PQ 果眞與 ℓ 垂直嗎? 請你們檢驗。

你們怎麼檢驗的呢?

喔, 有人用兩直線的斜率乘積是否等於 -1 去判斷, 不錯!

嗯, 還有人用向量 $\overrightarrow{PQ}=(\frac{-3}{2},\frac{1}{2})$ 與直線 ℓ 的法向量 $(3,-1)$ 是否平行作判斷, 眞的太好了。

接著, 讓我們來看一個對你們來說是一個新的問題, 即空間中, 求點與平面的距離的實例。

給點 $P(-1,2,-4)$ 及平面 $E:x-y-z-3=0$, 要求 P 與 E 的距離 $d(P,E)$。

像上一個例子一樣, 假定 Q 是 E 上的動點, 要求 $d(P,E)$ 就是要求 $\overline{PQ}$ 的最小值。怎麼表示 Q 的位置呢? 也就是怎麼設定 Q 的坐標呢?

當然不能寫成 $Q=(x,y,z)$, 因爲這樣的表示沒有顯示 $Q\in E$ 這個事實。

寫成 $Q=(x,y,x-y-3)$ 行嗎?

確是可行,

這時候, 我們仍然把 $\overline{PQ}^2$ 用 x,y 來表示, 就是:

$$\overline{PQ}^2=(x+1)^2+(y-2)^2+(x-y+1)^2$$

怎麼求上面一式的最小值呢? 仍然用配方法:

$$\begin{aligned}&(x+1)^2+(y-2)^2+(x-y+1)^2\\&=2(x^2-xy+y^2+2x-3y+3)\\&=2[x^2-(y-2)x+y^2-3y+3]\\&=2[(x-\frac{y-2}{2})^2+\frac{3}{4}(y-\frac{4}{3})^2+\frac{2}{3}]\end{aligned}$$

諸位看到, 要是讓 $x-\frac{y-2}{2}=0$ 及 $y-\frac{4}{3}=0$, 這時候 $\overline{PQ}^2$ 取得最小值 $\frac{4}{3}$, 也就是 P 與 E 的距離等於 $\frac{2}{\sqrt{3}}$。而同時, 我們得到 $x=-\frac{1}{3}$, $y=\frac{4}{3}$, 就是說, 這時候的點 Q, 其坐標爲 $(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{14}{3})$。

當然, 我們也可以檢驗看看, 此時的 $Q=(-\frac{1}{3},\frac{4}{3},-\frac{14}{3})$ 是否就是點 P 在平面 E 上的投影。在上一例中, 有人想到要用向量 $\overrightarrow{PQ}$ 是否與直線的法向量平行去判斷, 這時候, 也是可以仿照著做, 看看 $\overrightarrow{PQ}=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$ 是否平行平面 E 的法向量 $(1,-1,-1)$?

現在, 我要給你們一個問題:

給空間中的兩條直線 $\ell_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{3}$ 與 $\ell_2:\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-2}$, 求 ℓ_1 與 ℓ_2 的距離 $d(\ell_1,\ell_2)$。

在你們進行求解之前, 先給些提示。

因爲 $d(\ell_1,\ell_2)=\min\{\overline{PQ}|P\in\ell_1, Q\in\ell_2\}$, $\overline{PQ}^2$ 是由兩個動點 P 與 Q 的位置所決定, P 與 Q 的坐標決定了 $\overline{PQ}^2$ 的值。

如果取 $P=(2s+1,-s-1,3s)$, 而 $Q=(t-2,2t+1,-2t-1)$, 請你們完成下列諸步驟:

(1) 把 $\overline{PQ}^2$ 表爲 s 與 t 的二次式。

(2) 求出上式的最小值, 因而得出 $d(\ell_1,\ell_2)$ 是多少?

(3) 找出使 $\overline{PQ}$ 最小的 s 與 t 值, 隨之得到對應的點 P 與點 Q 的坐標。

(4) 檢驗 (3) 中之 P 與 Q 是否使線段 PQ 垂直 ℓ_1, 同時 PQ 也垂直 ℓ_2?

各位已經看到, 即使面對一道新的問題, 你們舊有的知識與經驗, 有時仍派得上用場, 不要以爲解新問題就非要新方法新工具才行, 總要先嘗試解決看看, 不行再另想辦法。這種態度, 不僅使我們的知識常得到歷練整合的機會, 而且對於新知識, 新方法, 反倒更易明白它們的意涵及定位, 建立健康而有效的接納。

現在, 讓我們回到開始的那一個距離公式
$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$
看看它是怎麼來的?

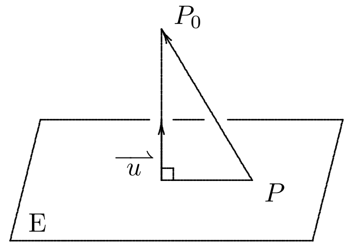
我們用向量這一新的工具作如下的分析:

取平面 $E: ax+by+cz+d=0$ 上的任意點 $P(x,y,z)$,

因此有 $d=-(ax+by+cz)$

隨之
$$\frac{|ax_0+by_0+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$
$$=\frac{|a(x_0-x)+b(y_0-y)+c(z_0-z)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

上面最後一式可看作是兩個向量 $\overrightarrow{u}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$ 與 $\overrightarrow{PP_0}=(x_0-x,y_0-y,z_0-z)$ 的內積的絕對值, 其中 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ 爲已知點, 它的一個幾何意義是 $\overrightarrow{PP_0}$ 在平面 E 的 單位法向量 $\overrightarrow{u}$ 的投影長, 從附圖, 我們看到這個投影長就是 P_0 與平面 E 的距離 $d(P_0,E)$。



各位已見識到, 我們從向量觀點看這一個距離公式, 它的意涵只不過是個投影長, 因而領會到, 比起前面例中所使用的配方法, 向量在作爲一種解題的工具上所展現的簡潔與力量。

學到的知識, 如果僅是片片落葉, 沒有關聯, 看不出脈絡, 學習就易成爲無趣的經驗, 痛苦的負擔。教師儘管熱情, 生怕學生吃不夠喝不足, 佳餚一盤盤的端上, 但是未經充分咀嚼細細品味, 硬往肚中充塞, 到後來, 就只是脹滿的不快經驗, 哪存有美味餘香? 因此, 教學中, 藉問題而發揮, 得其意而空形, 帶領學生進入整合、聯想與創造, 如同美食, 從材料

的準備, 過程的調製, 到端上桌後色香味的評品, 過程的經歷, 就是一場美宴, 一種享受, 一次豐富的建構。

註: 課本上的解法:

設 $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$, 則知

$$\alpha^n + \alpha^{-n} = 2\cos\theta$$

因此

$$\begin{aligned}
&\cos 5\theta + 5\cos 3\theta + 10\cos\theta\\
&= \frac{1}{2}[(\alpha^5+\alpha^{-5}) + 5(\alpha^3+\alpha^{-3})\\
&\quad +10(\alpha+\alpha^{-1})]\\
&= \frac{1}{2}(\alpha+\alpha^{-1})^5\\
&= \frac{1}{2}(2\cos\theta)^5\\
&= 16\cos^5\theta
\end{aligned}$$

—本文作者任教於新竹科學園區實驗高中—