數學方法論與新世紀數學教學 ——“MM 數學教育方式”縱橫談 1

徐瀝泉

科學普及工作取得的成就, 不像發現了一個金礦那樣令人歡欣鼓舞, 但它對人類的意義更爲深遠, 給社會帶來的利益遠遠超過這種有形的財富。 —牛津格言

摘要: 本文漫談了在世紀之交即將到來的時刻, 一種新的數學教育方式, 即 MM 方式是如何產生的, 有什麼優越性, 怎樣操作, 效果如何等等, 作者是該方式的設計與組織實施者, 一切身歷其境。

1. 問題出在哪裡

人類很快就要進入21世紀, 21世紀, 不僅是一個現代高新技術繼續處於更大變革的新世紀, 而且是一個更側重於研究人的發展的新世紀, 而“高新技術從本質上講是一種數學技術”且“數學科學對於人的教育作用是非常巨大的”, “數學是人類文明的重要組成部分”。[1]

1994年春, 作者接到湖北省天門市一位中學生的來信, 信中有這樣的一句話: “學生愛學習, 是因爲學生愛生命; 學生愛數學, 是因爲生命需要數學。”的確, 在現代生活中, 在今天, 數學對於人類來說, 是“此君不可一日無”了。

因此, 目前世界上大多數國家都已經把數學教育作爲提高國民素質的重要手段, 並且越來越認識到發展數學科學的極端重要性。中國更應該這樣, 因爲“數學是中國人民擅長的科學”。

然而, 與此形成強烈反差的是: 在現代學校的基礎教育中, 成千上萬的差生對數學不感興趣, 他們厭惡數學。

也許有人會說, 這都是外部原因造成的。可是, 三年的數學教材用兩年時間匆匆教完, 留下一年作復習題, 選學內容不選學, 必學內容也未必學 (原因是“高考不作要求”)。數學課上數學滋味不濃, 師生們品嘗不到數學味道的精美, 更不用說到現代數學的廣闊原野上去領悟百花齊放、推陳出新的意境, 去汲取

思考問題和解決問題的取之不盡用之不竭的豐富源泉了··· [2]。所有這些, 也硬要說成是由於數學教育的外部原因所造成的, 未免就有點迂腐。

自七十年代末以來, 余目睹衆多中學數學教師天天疲於奔命, 收羅五洲四海的復習題、習題册; 廣大青少年學生日夜奮戰在題海之中而毫無喘息之機的情景 (據說這方面臺灣的聯招與大陸的“高考”同樣嚴酷無情, 乃至整個東亞皆如此[3]), 頗有點“欲濟無舟楫, 端居耻聖明”[2]之感, 乃棄“官”還鄉[3], 致力於教育科學的研究, 尋求“普度衆生”攻破“題海”的法寶與武器。

那麼到底什麼才是攻破“題海”的有力武器? 使用什麼法寶才能調動主體 (學生) 學習數學的強烈興趣? 這正是數學教育本身迴避不了的現實問題。這裡我們暫不考慮數學教育的外部影響, 因爲數學教育質量的提高其最終的落脚點還是要落實到數學教育內部如何採取最有效的教育方式這個核心問題上來。

那麼, 又什麼才是最有效的數學教育方式呢?

採取實用主義的態度, 在數學教材中引進“三機一泵”行不行? 顯然, “文革”期間的做法已給中國大陸帶來了嚴重的災害和深刻的教訓;

一味地強調數學教育的“現代化”, 對數學教材進行“公理化處理”, 行不行? 歐美等國新數運動的失敗, 則使人們認識到應當“回到基礎去”(Back to Basics)!

一而再, 再而三地降低教材難度行不行? 把較複雜一點的內容逐步刪去, 把抽像程度較高一些的內容也逐步刪去 (實際上是在把數學的精美內容和完美形式都逐步逐步地刪去) 最後數學課本越來越薄 (註: 配套練習册和參考書卻越來越厚), 內容越來越少, 只剩骨架沒有血肉, 這仍然調動不了“主體”(學生) 學習數學的興趣。

恰恰相反, “爲了遷就學生而片面降低對學生的要求, 只會縱容一種好逸惡勞和見難即退的心態, 造成人的素質下降。” [4]

爲什麼一方面數學教育急需改革, 但另一方面一改就會出問題, 甚至遭到失敗呢? 問題出在哪裡? 怎麼辦?

從失敗中吸取教訓, 從成功中總結經驗, 我們的回答是: 貫徹數學方法論的教育方式 (簡稱 MM 方式), 全面提高學生素質。

2. 這樣回答行嗎

MM方式是怎樣提出來的? 爲什麼要在數學教學中貫徹這種方式? 即, 它的理論依據和客觀背景是什麼?

2.1. 第一, 我們要搞清楚什麼是數學方法論?

近年來, 國內外一些著名數學家都致力於對數學哲學的研究。他們從本體論與認識論的角度提出了“數學是一種模式眞理”的數學觀[5]。按照這種觀點, 數學模式在本體上具有兩重性, 就其內容而言, 具有明確的客觀意義, 是思維對於客觀實在的能動反映, 任何數學模型都有它的現實原型; 就其形式結構而言, 數學並非客觀世界中的眞實存在, 而只

是創造性思維。亦即理性的創造物。從前者而言, 數學是人們所發現的; 從後者而論, 數學是人們所發明的。而數學的每一次重大的發現和發明, 都是以決定數學向本質上的嶄新狀態過渡的傑出成就爲標誌的。這中間伴隨著認識論與方法論上的突破, 伴隨著數學思想方法的革命性的變革, 有一門學問就是專門以數學的思想方法作爲研究對像的數學分支, 它就是數學方法論。[6]

徐利治教授指出: "數學方法論主要是研究和討論數學的發展規律, 數學的思想方法以及數學中的發現、發明與創新等法則的一門學問。" [7]

2.2. 第二, 我們要搞清楚數學教育與數學方法論有什麼關係?

從數學方法論觀點看, 數學具有兩重性, 它既是一門系統的演繹科學 (從最後被確定的定型的數學來看), 又是一門實驗性的歸納科學 (從創造過程中的數學來看)。[8] 因此, 數學教學應充分體現數學的這兩個側面, 使學生受到全面的數學教育, 忽視數學的歸納性的一面是不完全的數學教育。

另外, 運用數學方法論的觀點和高級神經活動生理學已有的研究成果, 分析數學思維, 我們看到, 數學思維也有兩重性, 一類是進行邏輯推理的抽像思維 (左腦思維); 另一類是進行合情推理或似眞推理 (Plausible Reasoning) 的形像思維 (右腦思維)。[9] 這後一類思維的具體表現形式是觀察、實驗、類比、聯想、不完全歸納等。它們不僅在數學的發現過程中起著十分重要的作用, 而且廣泛應用於社會生活之中。因此, 我們不應該把數學單純地理解爲一門工具學科, 而應該把它當作一種文化形態來對待, 在數學教學中致力於提高人們的一般文化修養。當然要充分發揮數學的這種文化教育功能, 就必須採用一定的方式來組織教學。

G. Polya 曾以解題爲例, 說明離開似眞推理 (合情推理), 人們無法接受數學中抽像結論的道理。這個例子說的是他在證明

$$\sum_1^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} < e\sum_1^{\infty} a_n)$$

(a_n 是不全爲零的非負實數)

這個不等式的時候, 他用一個等式來定義正數 $c_1c_2c_3\cdots c_n=(n+1)^n$, 從而

$$\begin{aligned}
&\sum_1^{\infty}(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}\\
&=\sum_1^{\infty}\frac{(a_1c_1\cdot a_2c_2\cdots a_nc_n)^{\frac{1}{n}}}{n+1}\\
&\le\sum_1^{\infty}\frac{a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n}{n(n+1)}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}a_nc_n\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\\
&=\sum_1^{\infty}a_nc_n\sum_{k=n}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{(n+1)^n}{n^{n-1}}\cdot\frac{1}{n}<e\sum_1^{\infty}a_n
\end{aligned}$$

證明本身是非常簡潔而巧妙的, 但是這裡推理的關鍵是定義序列 $c_1c_2c_3\ldots$, 學生對此就無法理解, 會感到"它是突然從天而降的", "只有作者知道這一步的目的。" 這就是人們接受抽象結論的困難所在, 古人云: "像顯可徵, 雖愚不惑, 形潛莫睹, 在智猶迷"就是這個道理。因爲人們無法了解到它的來源

與構想, 只能被動地承認其正確, 若整個教材基本上是按這種體系編寫, 教師又不對它進行教學法加工, 學生就只能被動地接受與理解這些法則, 靠套公式, 摹仿例題而日復一日、年復一年地機械操練, 這對他們智力水平的提高很難有成效。學生的智力得不到發展, 而所學內容卻不斷深化, 長此以往, 他們就會感到困惑而對數學產生厭惡情緒。

G. Polya 指出, 要讓學生眞正理解與掌握數學中的抽象結論, 就必須採用一種所謂“啓發式”的敍述形式, 把抽象結論的來龍去脈完全剖析給學生, 他以 $c_1c_2c_3\cdots$ 這個序列定義的發現爲例, 詳細敍述了他是如何觀察、聯想、猜測到可以用平均不等式來加以證明:

$$\sum_1^\infty (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \leq \sum_1^\infty \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \sum_{n=1}^\infty a_n \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k}$$

卻出師不利, 級數 $\sum \frac{1}{k}$ 發散, “完全失敗啦!”[8] 然後他仔細分析了原因, 發現可能是 $a_i (i=1,2,\ldots,n)$ 這些數之間差異懸殊, 因爲平均不等式當且僅當 a_i 全相等時等式成立, 當 a_i 不全相等時, 兩邊是不同的, 而當 a_i 很不相等時, 兩邊的差距就會更大。故想到構造補償因子, 在 a_i 之間插入 c_i 來解決矛盾:

$$\sum_1^\infty (a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} = \sum_1^\infty \frac{(a_1c_1\cdot a_2c_2\cdots a_nc_n)^{\frac{1}{n}}}{(c_1c_2\cdots c_n)^{\frac{1}{n}}} \leq \sum_1^\infty \frac{a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n}{n(c_1c_2\cdot c_n)^{\frac{1}{n}}} = \sum_{n=1}^\infty a_nc_n \sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k(c_1c_2\cdots c_k)^{\frac{1}{k}}}$$

到此, 我們已不難理解, 爲什麼要定義: $(c_1c_2\cdots c_k)^{\frac{1}{k}} = k+1$, 即$c_1c_2\cdots c_k = (k+1)^k$ 了, 因爲 $\sum_{k=n}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=n}^\infty (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2}\cdots$ (註: 這裡我們已經濃縮了 G. Polya 的探索過程)。

這一典型例子基本上反映了數學中發明創造的一般過程。揭示了任何眞理的出現, 都得經歷一番磨煉, 説明了在失敗的現實中往往蘊含成功的全部信息, 關鍵是能否破譯事實所提供的這無形的密碼。

美國哥倫比亞大學生物學家拉夫·赫路威指出: “總的説來, 智能就是指處理信息的能力。” 由失敗的事實提供的信息完成獲取成功的過程這正是智能的的特徵。近代人工智能科學指出: “思維的特徵是自尋目標, 而自尋目標是通過負反饋來實現的。” 這就是説對原擬訂達到目標的計劃, 是由受挫折提供的信息不斷進行調整, 才得以實現的。這旣是思維的特徵, 又是智能的表現, 但在現代教材中沒有似眞推理的內容, 當然也不可能有這樣符合思維規律提高智能的有效訓練了。

由此看來, 學數學的困難, 原因不是它本身的抽象形式, 而是離開了抽象的背景, 離開了用似眞推理來發現它的過程, 離開了在受挫折中對反饋信息的分析, 離開了生動活潑的創造發明與創新的活動機制。

現在, 我們似乎有更充分的理由來回答第1部分末所提出的問題了。即: 爲什麼一方面數學教學急需改革, 但另一方面一改就會出問題甚至遭到失敗, 而傳統的教學形式雖

弊病很多, 卻能在多次改革之後, 仍立於不敗之地? 原因就是缺乏正確的理論指導。

正像當年牛頓時代的微積分, 人們無法理解微商分母的意義一樣, 你說它是零講不通, 不是零也講不通。數學教學的改革似乎也處於一種進退維谷的境地, 衆所周知, 是因爲柯西極限論的誕生才消除了人們對微商分母的困惑; 同樣數學方法論的創立終使人們看清了傳統數學中弊病的根源及其解決它的正確途徑。所以徐利治教授指出, 要用 G. Polya 思想改革數學教材和教法, 要培養 G. Polya 型的數學工作者, 把數學方法論的原則貫徹到數學教學中去。

2.3 第三, 我們再扼要地回顧一下國內外數學方法論研究與數學教育的實際相結合的歷史與現狀

遠的姑且不論, 近年來, 由美國伊利諾依大學阿爾巴納—香檳分校和俄亥俄州大學共同開發的「calculus & Mathematica」(簡記爲 c&M) 課題, 其目的就是"向學生頭腦中灌輸數學思想的方法, 激勵學生學習的方式"。強調要把數學作爲一種科學進行探討, 而不是把它作爲一種宗教教義, c&M 把通常的學習過程

課堂講授—記憶—測驗

替換爲Saunders Maclane 提出的過程

直覺—探試—出錯—思索—猜想—證明[10]。

這與 MM 方式是不謀而合的。

在中國, 尤其是本世紀80年代以來, 民間的許多組織和個人對 G. Polya 和數學方法論的研究也明顯地活躍起來。徐利治教授曾親自主持了全國數學方法論與數學史、數學教育史研討會 (1987年8月於大連理工大學)。在楊之 (楊世明先生的筆名, 諧楊輝與祖沖之之音, 一心振興中國數學) 和周春荔教授 (北京首都師大) 等的主持下, G. Polya數學教育思想和數學方法論研討會在北京 (P. M. I, 1989, 5)、上海 (P. M. II. 1992, 10)、湖北襄樊 (P. M. III, 1995, 10)、武漢 (P. M. IV, 1997, 11) 等地相繼召開。

大連理工大學、南京大學、曲阜師範大學等許多學校還專門組織讀書討論班, 系統地研究 G. Polya, 有意識地應用方法論觀點設計和指導大學的數學教學改革。曲阜師大還建立了由徐利治教授兼任主任的科學方法論研究中心。

綜上所述, 作者審時度勢, 於1989年5月設計了「貫徹數學方法論的教育方式, 全面提高學生素質」數學教育實驗 (簡稱 MM 實驗)。而"大連研討會"和"北京研討會"等學術會議的召開, 恰如"知時節"的好雨, 爲在中國大地上 MM 方式的破土滋生起到了"當春乃發生"的作用。

3. 怎樣操作

那麼, 到底什麼是 MM 方式? 怎樣在數學教學中恰當而有效地組織和實施這種方式?

笛卡爾指出: "數學是在一切領域中建立眞理的方式。"

3.1. 數學方法論的教育方式

在數學教學過程中, 師生自覺地遵循“教學·研究·發現” 同步協調原則和“既教 (學) 證明又教 (學) 猜想”的原則; 充分發揮數學的科學技術功能和文化教育功能; 教師恰當地、不失時機地對學生進行數學的反璞歸眞教育、數學的美育、數學發現法教育、數學家優秀品質教育、數學史志教育, 進行數學中的合情推理、邏輯推理和一般解題方法的教學; 並引導學生不斷地自我增進一般科學素養, 社會文化修養, 形成和發展數學品質, 全面提高自身素質。這就是數學方法論的數學教育方式 (簡稱 MM 方式)。

3.2. MM 方式的實施與操作

爲明確起見, 先給出該方式的基本操作表:

MM基本操作表 (供調控實驗變量參考)

<table>
<tr><th></th><th></th><th>MM 因子</th><th>MM 可控變量</th><th>水平</th><th>MM 狀態變量</th><th>水平</th></tr>
<tr><td rowspan="8">數
學
方
法
論
的
教
育
方
式</td><td rowspan="5">宏
觀
操
作</td><td>數學的對象
及性質研究</td><td>數學的反璞歸真教育
密切聯繫生活
提倡問題解決</td><td></td><td>數學意識
應用能力</td><td></td></tr>
<tr><td>數學美學
方法研究</td><td>數學教學中的美育
運用審美原則
引進美學機制</td><td></td><td>數學美感
審美能力</td><td></td></tr>
<tr><td>數學發明心
理學的研究</td><td>數學發現法教育
揭示創造活動
再造心智過程</td><td></td><td>數學機智
創新能力</td><td></td></tr>
<tr><td>數學家成長
規律的研究</td><td>數學家優秀品質教育
介紹生平事蹟
分析成敗緣由</td><td></td><td>科學態度
競技能力</td><td></td></tr>
<tr><td>數學史與數學
教育史的研究</td><td>數學史志教育
巧用數學史料
編制軼事趣聞</td><td></td><td>唯物史觀
洞察能力</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">微
觀
操
作</td><td>觀察、實驗、歸納
類比、聯想、猜測
等合情推理的方法</td><td>合情推理的教學
教 (學) 猜想　教 (學) 發現</td><td></td><td>合情推理能力
一般科學思維方式
形像思維的能力</td><td></td></tr>
<tr><td>數學模型法、公理
化方法和抽像分析
法等邏輯推理方法</td><td>邏輯推理的教學
教 (學) 證明　教 (學) 反駁</td><td></td><td>邏輯推理能力
具體事物數學化的本領</td><td></td></tr>
<tr><td>徐利治“RMI”原則
波利亞解題模式等
一般解題方法研究</td><td>一般解題方法的教學
教 (學) 規則　教 (學) 策略
教 (學) 算法　教 (學) 應變</td><td></td><td>運籌布算能力
數學智力活動結構
和綜合應用的能力</td><td></td></tr>
</table>

註: 在“水平”欄的每一空格中, 請填上您認爲最合適的等級碼: (4) 或 (3) 或 (2) 或 (1), 它們分別標誌著優或良或中或下4個不同級別的水平, 如您覺得本課無該項操作也可不塡。

MM方式具體採用8個可控變量來落實數學的科學技術功能和文化教育功能。相對於數學的技術教育功能而言, MM 方式更有利於發揮數學的文化教育功能。因爲這種方式要帶領學生去研究和發現數學中的原理和方法, 要讓學生的思維方式與處理問題的方法與數學家越來越接近, 就必須把人類精神財富中最精華的東西授給學生, 要讓學生在探索、鑽研的實踐中像歐拉、希爾伯特那樣具有頑強的拼搏毅力, 無私奉獻與自我犧牲精神。並能遵循哲學、美學、心理學和認知科學等規律, 更會客觀地認識世界, 反映它的本來面目, 要學會正確地觀察、猜測, 正確地抽象概括, 表達、總結、回顧和完善, 這就是一個系統的文化教育工程。

3.2.1. “數學的反璞歸眞教育”, 指教師能否引導學生從日常事物的具體問題中去感知與此有關的數學對象。去其枯燥之外飾, 還其生動之本眞。

日本數學教育家橫地淸教授 (山梨大學) 曾說過, 我們在數學課上講了那多的關於角的概念和知識, 許多孩子卻不知道樹丫之間存在角。這是傳統教學的嚴重缺陷。

傳統教學中, 對於數學理論不能給人以豐富性和多樣性的觀念。內容之貧乏又沒有什麼有趣的應用。教學中不善於引導學生從直接接觸的變化多端的外部世界中去考察數學對象, 不會把具體問題數學化。這種造成數學理論和生產生活相脫節的現象, 與教師在教學過程中把實踐僅僅理解爲用數學語言表述的大量習題的訓練不無相關。這種教學的結果, 學生也能獲得相當的解題技能技巧, 但大量的很簡單的日常生活中所碰到的實際問題, 卻感到無能爲力, 不善於把它歸結爲數學問題, 所謂“高分低能”與其說還有什麼別的理解的話, 倒不如就按此意義來理解。

3.2.2. 如前所述, 爲什麼許多學生對數學課不感興趣? 簡而言之, 他們聽不懂先生的講解, 看不懂教材的編寫。也就是說, 他們對數學的內容和方法不甚理解。何爲理解? 懂就是理解, 錢偉長教授說得好: “七七四十九者, 乃七個七加起來等於四十九也。”因此, 課堂教學的首要問題就是要考慮教師的思維活動 (先生講的) 和學生的思維活動 (學生想的) 和教材編者的思維活動 (數學家是怎麼做的) 怎樣才能掛上鉤, 也就是說要進行數學發現法教育。教師必須對數學創造活動中的心智過程作必要的闡述和分析。在必要和可能情況下, 把數學思維活動的慢鏡頭充分暴露出來 (像 G. Polya 剖析小高斯關於數列求和過程中的思維活動那樣, 像電視錄像中把足球比賽場上精彩的射門過程重現一樣)。

而數學的這種或那種發現、發明與創新過程, 卻總是要遵循和體現美學原則的存在性特徵。因此, 數學教學中在對學生進行數學發現法教育的同時, 還必進行數學的美育。

比如, “球體積公式”的教學, 如果教師無意識地進行美育的話, 他就不可能把同底 (半徑都是 R) 等高 (也是 R) 的圓錐、半球和圓柱三者的體積具體地表達爲

$$\mathbf{\frac{1}{3}}\pi R^3(V_{錐})<V_{半球}<(V_{柱})\pi R^3=\mathbf{\frac{3}{3}}\pi R^3$$

之所以這樣處理, 是爲了不失時機地引進美學機制, 引導學生猜想 (進行美的選擇!):

$$V_{半球}=\mathbf{\frac{2}{3}}\pi R^3$$

然後再加以證明。[11]

3.2.3. 巧用數學史料、編制趣聞軼事, 對提高學生的學習積極性, 激發學生的最佳學習動機總是十分奏效的。“巧用”者, 恰到好處也! 下面給出一個較爲綜合一點的例子。

“圓錐曲線的第二定義”及其爾後的“統一定義”, 貫穿在「圓錐曲線」這一章中, 占有重要地位。這部分內容, 到底怎麼教? 我們對此作了如下的教學法加工。

1) 引導學生從計算橢圓的焦半徑 (橢圓焦點到橢圓周的距離) 出發, 讓橢圓的第二定義從經驗歸納中發現;

2) 把雙曲線與橢圓性質相類比, 使雙曲線的第二定義從類比推理中獲證。

拋物線怎麼辦? 雙曲線一節教材的最後, 編者安排了這樣一道習題:

當 α 從 $0°$ 到 $180°$ 變化時, 曲線 $x^2+y^2\cos\alpha=1$ 怎樣變化?

根據以往的經驗, 學生在解答此題時總是忽略了 $\alpha=90°$ 的情形 (即曲線變爲兩條平行線)。該題也給我們以參數變化連續性的啓示。對, 通過對離心率 e 的連續性討論, 讓拋物線的第二定義 (相對於初中數學中的二次函數定義), 從數學的分劃思想中呼之欲出!

於是老師引述了18世紀中葉, 天文學家提丟斯和數學大師高斯合作的一段佳話, 發現在火星和木星之間存在著一個小行星帶的故事。[12]

這時, 學生已經知道下列事實:

$$P=\{M|\frac{|MF|}{d}=e\}\triangleq\begin{cases}\text{橢圓} & e\in(-\infty,1)\\ \text{雙曲線} & e\in(1,+\infty)\end{cases}$$

因此, 十分自然地預感到當 $e=1$ 時, 必有介於橢圓和雙曲線之間的某一理想曲線存在。對它的求解欲望也就可想而知了。而且以後在答題時他們也很少再犯忽略分叉點或特殊值的錯誤。這一史料的引用與編制, 可謂是恰到好處。

又如,「排列組合、二項式定理」這一單元的教學中, 教師運用“歧路亡羊”的成語故事, 引導學生對它的數學含義進行討論, 樂於邏輯地發現, 得出了“二項式定理”。同學們在評教時說道: “老師的課生動有趣, 引人入勝。歧路亡羊的故事非常吸引人, 這樣的教學方法令人耳目一新。”

順便提及, 只要善於發掘, 我國的許多典故和膾炙人口的著名詩句中, 也蘊涵了極其豐富的數學思想。比如, 在解釋整體與部分的對等 (1-1對應) 時, “南柯一夢”[4] 便是很好的題材(短短的一頓飯功夫, 竟與幾十年光陰對等起來)。李白的名句“孤帆遠影碧空盡, 惟見長江天際流”。[5] 是“極限”概念的生動寫照。韓愈有詩曰: “天街小雨潤如酥, 草色遙看近卻無。”[6] 可見, 這種“遠看淸楚近看模糊” 的模糊數學思想(事物之間存在著的一種分劃上的中介過渡性), 早在1200多年前, 在我們古人的頭腦中就開始萌發了。

3.2.4. 從數學科學的嚴密性、抽象性和形式化等基本特徵來看, 數學的發展和完善, 數學體系的建立, 必須依賴於抽象分析法、數學模型和公理化方法; 而要恢復數學思維的生動、機智, 充滿創造活力的本來面目, 就必須歸功於數學發現過程中所使用的那些觀察、實驗、類比、聯想、猜測、經驗歸納和一般化、

特殊化等方法了。我們不妨把前者稱爲邏輯推理的方法, 而把後者稱爲數學中的合情推理或似眞推理的方法, 當然, 這種劃分並不是絕對的、機械的, 要看到它們兩者之間的辯證統一。因此, 在數學教學中必須做到"合情推理與邏輯推理"並舉, "歸納與演繹"並舉, "分析與綜合"並舉, "發現與質疑"並舉, 眞正做到"既教證明又教猜想", 不斷引導學生達到數學中的發現和發明。

如上所述, 對「圓錐曲線第二定義」那樣的教學設計, 使問題的展開逐步深入, 逐步完善, 在探索式教學中培養了學生思維的深刻性和靈活性, 導致該實驗班學生發現教科書中在"求軌跡方程時排除了定點在定直線上的可能性", 因而他們給出了當定點恰在定直線上時的補充定義, 完善了該單元的教學[13]。

這裡需要指出的是, 有人擔心運用數學中的合情推理模式會削弱邏輯推理的教學。這種擔心是不必要的, 合情推理中並非沒有邏輯因素。

我們的合情推理模式是這樣的一種模式, 那就是: 從低度可靠到高度可靠, 直至完全可靠!

這裡同樣需要指出的是, 教學過程中重視數理邏輯的作用, 加強邏輯推導的訓練, 正是要摒棄那種貌似嚴密性而實質有許多漏洞的證明的教學。

3.2.5. 另外, 數學與解題從來就結下了不解之緣。

教師要善於把解題的學問上升到理論和方法論的高度來認識, 再用以指導學生的練習, 在解題中引入興趣激發機制, 誘發學生的最佳解題動機。充分發揮他們解題的主動性和積極性, 使他們既能提高解題能力又能階段序進地接受一般數學思想方法的熏陶, 自我增進數學營養。[14][15]。俗話說, "道高一尺, 魔高一丈", "一般解題方法"的教學, 正是攻破"題海戰術"最有力的武器。

4. 效果如何

4.1. 有發現的設計必有發現的經歷

MM方式的出現, 一改過去學生學習的被動局面, 使他們對既教證明又教猜想的探索規律產生濃厚興趣, 整個教學過程也就融入發現發明的主旋律中, 詳細可參閱專題論文「發現的設計&發現的經歷」[16]。現擇其一二。

(1) 比如從方法論觀點看, 極其抽象的群論, 與中學生不再有任何隔閡。群論的思想能使中學生學會從整體的觀點、對稱的觀點、層次結構的觀點去處理問題, 能像高明的棋手一樣, 不去計較一兵一卒的得失, 而著眼於全局的安排, 有效地克敵制勝, 這裡有一個生動的例子, 正好說明這個問題:

> 設 a、b、c 是互不相等且大於零的整數, 又 a、b、c 成 G. P, $\log_c a$、$\log_b c$、$\log_a b$ 成 A. P, 求其公差 d。

此題就是在條件 $b^2 = ac$, $2\log_b c = \log_c a + \log_a b$ 成立的情況下, 求 $d = \log_b c - \log_c a$ 之值。過去我們曾以各種不同方法求解, 但計算都很複雜, 不能令人滿意,

也曾考慮過“巧法”, 但長期未能發現, 當我們用 MM 方式來組織教學時, 群論思想滲透到解題過程中, 我們不再關心個別數字的代入、化簡; 而是注意整體的對稱, 化簡的層次, 使各項處於平等地位, 呈現對稱性:

設 a、b、c 三數爲 a、aq、aq^2, 即 $a=\frac{c}{q^2}$, $b=aq$, $c=bq$。則 $2\log_b bq=\log_c \frac{c}{q^2}+\log_a aq$。(*) 這樣我們就可以整體同步協調地化簡, 效果相當於圍棋中一下吃去敵方一大片, 由 (*), 請看:

$$2+2\log_b q=1-2\log_c q+1+\log_a q$$
$$\Rightarrow 2(\log_b q+\log_c q)=\log_a q$$
$$\Rightarrow \log_b a+\log_c a=\frac{1}{2}, \text{且又有}$$
$$d=\log_b c-\log_c a, b^2=ac \text{ 於是}$$
$$d=\log_b ac-\frac{1}{2}=\log_b b^2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

如此簡潔地得出結果, 計算中各部分配合得如此默契、和諧, 其原因就在於初始佈局中就蘊涵著對稱與和諧。

(2) 再看一個先由經驗歸納再用抽象分析達到數學中又一發現的例。

初中一年級的一堂代數課上, 師生正在共同討論一個火車追及問題。突然, 一位同學舉起手來, 向老師提出了一個似乎“與此無關”的問題:

“3點鐘之後多長時間, 手錶上的分鐘和時針又互相垂直?”

“生活中處處有數學”老師馬上意識到這是增強學生的數學意識、提高學生學習興趣的極好 (素材) 時機,...。

課後, 我們從“某時刻起多久鐘錶之長短針(分針和時針) 相互直交?” 這一較具一般性的問題人手, 通過經驗歸納, 得到公式

$$t=\frac{360}{11}\{[\frac{11T-180}{360}]+\frac{3}{2}\}-T$$
$$\text{或}t=\frac{360}{11}\{1-(\frac{11T-180}{360})\} \qquad (1)$$

其中T的單位是分鐘, $[\frac{11T-180}{360}]$和$(\frac{11T-180}{360})$分別表示該數的最大整數部分和小數部分。公式 (1) 就是已知變量 T(某時刻) 和未知變量t(多久) 之間的函數關係, 記作 $t(T)$, 爾後經證明, 再把它發展成 Fourier 級數:

$$t=\frac{180}{11}-\frac{\frac{360}{11}}{\pi}\Sigma\frac{(-1)^k\sin\frac{11}{180}k\pi T}{k},$$
$$T\in((2k-1)\frac{180}{11},(2k+1)\frac{180}{11})\ k\in N \quad (2)$$

十分有趣的是由 (1) 和 (2) 可導出一系列參考級數, 如 $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$ 等, 還有“優美比”

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots}{1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots}。$$

一個日常生活中人所共知的現象, 但也是人們所易於忽略的小小算術題, 竟能導出這麼多有趣而重要的結果, 眞是“晴空一鶴排雲上, 更引詩情到碧霄”[7]了。

由鐘面上時針、分針之間的垂直與重合, 自然又可類比聯想到宇宙間諸如日食、月食、火星大沖、慧木相撞, 乃至“日月合壁、五星聯珠、七曜同宮”等天像奇觀的周而復始現象, 並由此可能會發現隱含於其中的更多更有趣的數學規律(那怕是似眞的)。

實際上, 我們引入一個變換

$$x=(T-180/11)/(360/11)$$
$$\text{和 } y=1-T/(360/11)$$

則上述公式 (1) 變爲高斯函數 $y = (x)$, 在此意義上說函數 $t(T)$ 便是 $y = (x)$ 的一個現實原型, 凡數學對象都具有客體背景存在性這一特徵[17]。其實高斯函數 $y = (x)$ 或 $y = x - [x]$ 也是前人從具體問題具體對象中抽取出來的一個數學模型, 不過不一定是處於同一客體背景之下罷了。而人們之所以習慣於把它們展成 Fourier 級數或是其他的什麼級數, 無非是爲更方便地研究其性質而把這些數學模型進一步理論化或技術化。[18][19]

4.2. 實驗結果

4.2.1. 實驗過程

1989年9月, MM 實驗方案通過了專家咨詢和可行性論證, 在無錫市區的4所中學 (高中階段) 正式實施, 開始了爲期3年的第1輪實驗。我們採取“分層取樣、隨機編班、領導推薦、自願承擔 (指實驗教師)” 相結合的辦法確定被試, 他們是無錫市第3中學 (前身是私立無錫中學, 民國9年 (1920年)9月9日由高陽父子創辦) 高一 (2) 班, 第12中學 (前身爲私立競志女中, 由侯鴻鑒於光緒三十一年 (1905年) 正月創辦) 的“江南大學預科班”, 青山中學的高一 (4) 班和無錫市輕工職業中學的家用電器班。他們分別表徵著無錫市區4種不同類型的樣本水平。實驗一年後即初見成效。

1990年8月, 實驗點由無錫市區的4個擴大到江陰、宜興等地的20個, 此後每年都有新增實驗班, 到1994年, 已擴展到江蘇、浙江、江西、福建、湖北、湖南、四川、天津、北京等省市的17個地區的66個實驗點和實驗研究協作單位。

4.2.2. 實驗結論及其意義

MM實驗可觀察資料的數據分析和定性概括的已有成果, 完全支持了它的研究假設, 即

> 在數學教學中, 如能貫徹 MM 方式, 必將有利於提高學生的一般科學素養, 增進其社會文化修養, 形成和發展數學品質, 從而全面提高學生素質; 同時可以培養和造就一支既能從事教學又能從事科研的“G. Polya 型” 的數學教師隊伍。

據不完全統計, 自 1989 年 5 月以來, MM課題組在省級以上刊物出版社和有關學術會議上發表、出版和交流的專題論文、論著、研究課教案、研究報告等百餘篇。從實驗的許多物化成果來看, 尤其是通過實驗研究論文集和教案集的概括與提煉, 它不僅產生了許多實際效果, 而且還揭示了數學教學中的德育原則、美育原則、充分暴露數學思維活動過程的原則、數學家學習機制激勵原則、既教證明又教猜想原則和“一般解題方法教學”的原則等6條狹義性原則。這正是實驗教師自己在他們的教學設計中體會和總結出來的。在此意義上說, MM 方式正是培訓高層次數學教師的有效途徑。在實驗過程中我們可以看到實驗怎樣使老教師煥發出“教學青春”, 也使青年教師脫穎而出的許多生動事例。

如前所述, MM 方式的目標是既要提高學生的一般科學素養和社會文化修養, 又要形成和發展他們的數學品質, 因此, 其最終成果必然會內化為學生的智能素質並且在適當的時候外顯出來。

從無錫市第1輪實驗班在「中學生一般能力傾向」測驗[8] 和當年參加全國高考及江蘇省預考數學成績上的統計檢驗表明, 實驗班學生在「中學生一般能力傾向」的4個測驗項目上, 實驗後均極其顯著地優於實驗初的水平。另外, MM 方式也提高了升學率。這至少說明“人家做到的事情我們可以做到, 人家做不到的事情我們也能做到。” 1994年5月, 以中國科學院院士, 澳大利亞麥克里大學名譽科學博士、原北京師範大學校長王梓坤教授和中國科學院數學研究所顧問、「數學研究與評論」雜誌主編、一級教授徐利治先生為首的專家鑒定委員會, 對 MM 實驗進行正式鑒定並給予高度評價。

鑒定意見指出: “該實驗所確證的MM方式, 只需對原有教材適當進行教學法加工, 操作簡便, 能與各種優秀的教學方法協同使用, 既能減輕師生負擔, 又能提高教學效益, 從而大幅度提高數學教學質量。”

鑒定組認為: “這種數學教育方式在小學、中學以及職教和成人教育中, 都是可行的、有效的, 值得繼續實驗和大力推廣。”

4.2.3 討論

那麼, 為什麼 MM 方式會具有素質教育和“應試教育”的雙重功能? 如前所述, 因為數學方法論本身是一門新興的數學分支, 它汲取了現代科學、現代哲學的新成果, 它的原則性高、普適性強, 而 MM 方式正是以此作為其重要的理論基礎, 故一旦把它自覺地應用於數學教學, 就能最有效地揭示數學科學“趣、美、眞”的特點。“趣”者, 來自實踐返回生活, 有血有肉生動活潑, 合乎情理順乎自然之所謂也; “眞”者, 內容的抽象, 形式的簡潔, 應用的廣泛, 結論的明確無誤和推理的嚴密; “美”即數學的廣泛聯繫和內在規律。因此, 它能從多方位多渠道發揮對人的教育作用, 至於它為什麼會在“題海戰術”盛行之時能立於不敗之地, 是因為一般解題方法和 G. Polya 數學教育思想等正是來自於對學生解題的觀察, “解題”正是它的拿手好戲。

那麼, 為什麼它又會如此突出而又明顯地具有既能提高學生又能提高教師, 使教學雙方都能獲益的雙重作用? 為什麼在實踐過程中執教者們又會發自內心地感受到“教師自己的提高更大於學生的提高”呢? 這是因為這種教育方式較之其他一些教學方式更能緊密地結合和充分運用數學本身的特點, 所以它能更有效地喚起教師自身的教學經驗, 從而提高他們的教學積極性。這使我們體會到, 只有當數學教育改革在正確的理論導向下, 其目標預示著數學教師本身的提高方向時, 才能使一種先進的教育方式轉變為教育者們的自覺行動, 才能使數學師資隊伍的培訓和建設更具有現實意義, 無疑地, MM實驗促使教師站到學科教育的最前沿, 且通過“教學·研究·發現” 這樣一種有效途徑, 等於為他們的繼續教育和在職提高創辦了一所開放型的超級進修學校。

另外, 教師的教和學生的學總是緊密地聯繫在一起的 (它們處於同一教學系統之中),

由於這種教育方式能夠充分調動學生學習數學的積極性和主動性, 因而解除了由於學生的厭學而帶來的煩惱。師生都從研究科學方法論和數學方法論, 尤其是解題方法論中獲益, 擺脫了“題海”的羈絆, 從而使數學教學步入良性循環。

結束語

面臨新世紀科技的挑戰, 有識之士率先認識到一切競爭歸根到底是人才的競爭。而社會要求數學科學作出貢獻的, 首先是用數學開發人的智力, 提高人們的科學思維水平。

衆所周知, 一些新技術的掌握和使用並沒有給人們的智力水平帶來多大的變化, 而整個文化水平的提高才促進了人類智力的發展。MM方式正是通過數學的文化教育功能和技術教育功能的交互作用來改變人的智力結構, 把開發人的智力落實到具體的程序中, 科學家能把現代的科研成果用於設計高效的電腦, 而 MM 方式則通過數學文化的方式來培訓無與倫比的人腦 (“數學頭腦”), 使科技的發展與人類智力的發展形成一個自組織、自適應、自完善的具有生命力的新體系。這樣, 教育與科技將永遠息息相關。教育與時代脫節的現象, 教與學脫節的現象將一去不復返, 正是在此意義上說, MM方式是完成新世紀數學教育現代化的根本方式。

一種嶄新的數學教育方式在新世紀即將到來的時刻, 在世紀之交, 已經開始了!

註:

1 MM 是 Mathematical Methodology 的縮寫

2 出自孟浩然 (689-740), 望洞庭湖贈張丞相。

3 指作者放棄洪澤縣教育局教學研究室主任一小吏之職。

4 唐 · 李公佐小說「南柯太守傳」, 說淳于棼與友人喝酒, 醉臥入夢, 到大槐安國被招爲駙馬, 配瑤芳公主, 官拜南柯太守, 爲政幾十年, 生五男二女, 極盡天倫之樂。一覺醒來, “餘樽猶溫”。

5 李白 (701-762), 黃鶴樓送孟浩然之廣陵, 前二句是“故人西辭黃鶴樓, 煙花三月下揚州。”

6 韓愈 (768-824), 早春呈水部張十八員外, 後二句是“最是一年春好處, 絕勝煙柳滿皇都。”

7 唐 · 劉禹錫「秋詞二首」, 前二句是: “自古逢秋悲寂寥, 我言秋日勝春朝。”

8 代號 SS-GATB-No.2、3、4、5, 由上海市教育科學研究所修訂。

參考文獻

1. 王梓坤, 今日數學及其應用。數學通報 (北京), 1995, 1。
2. 徐瀝泉, 用現代數學思想指導中數教育。曲阜師大學報 (自然科學版, 山東曲阜), Vol. 15, No.4, 1989, 10。
3. 張奠宙, 可以說“東亞數學教育學派”嗎? 數學教育學報 (天津), Vol.1, No.1, 1992, 12。
4. 陳鳳潔、黃毅英、蕭文強, 教 (學) 無止境: 數學學養教師的成長。數學教學 (上海), 1994, 5。
5. 徐利治、鄭毓信, 略論數學眞理。
6. 徐瀝泉, 數學方法論與數學教育實驗。數學教育學報, Vol.1, No.1, 1992, 12。

7. 徐利治, 數學方法論選講。華中工學院出版社, 1986。
8. (美)G. 波利亞著, 李心燦等譯, 數學與猜想(第二卷)。科學出版社, 1984。
9. 徐利治, 王前, 數學與思維。河南教育出版社(鄭州), 1990。
10. W. J. Davis, Horacio Porta, and J. J. Uhl, “Is the mathematics we teach the lame as the mathematics we do?” (中譯文, 數學譯林, Vol.16, No.1, 1997, 3)
11. 陳漢治, 既教猜想, 又教證明—“球體積公式”的教學設計。中學數學 (武漢), 1990, 10。
12. 馮建華, 關於圓錐曲線第二定義的教學。中學數學 (蘇州), 1991, 10。
13. 梁穎, 張麗 (實驗班學生), 關於求拋物線方程的一點思考及其他。中學數學教學參考 (西安), 1992, 6。
14. 趙國華, 王安甫主編, 數學解題訓練方法論同步滲透叢書 (初中卷1-8冊)。北京師大出版社, 1993。
15. 周家禧, 周公賢主編, 數學解題訓練。方法論同步滲透叢書 (高中卷全1冊)。南京大學出版社, 1994。
16. 倪瑞榮等, 發現的設計&發現的經歷。數學教育學報, Vol.5, No.2, 1996, 5。
17. 徐瀝泉, 星形線作爲直線族與橢圓族的公包絡。數學通報, 1987, 2。
18. 王繼岳, 徐瀝泉, 冪平均函數及其平均不等式。數學通報, 1985, 6。
19. 徐瀝泉, 對 Neyman Pearson 基本引理的改進。南京師大學報 (自然科學版), Vol.16, Sup, 1993, 10。

—本文作者任職於無錫市教育研究中心—