對六十六年大專聯考甲丙組數學試題第八題的一點意見

王淑霞

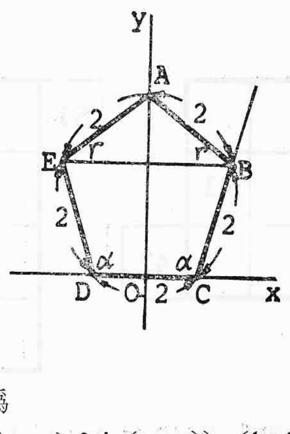
前　言

對於 66 年度甲丙組試題第 8 題，記得當我第一次看到時，腦子裏的第一個反應是幾何圖形，代數化，啊！我應嘗試用座標幾何及向量幾何一步步堆砌出合乎條件的凸五邊形所需的限制，以代數式列出再解，眞好！辛辛苦苦敎了學生一年的座標幾何向量幾何，（而且還極力舉例說明平面幾何的個案性，向量幾何的連貫性有脈絡可尋），終於派上用場了，相信考場裏的學生也和我一樣有此聯想！

過後，與人討論起來，甚至最近一期的「數播」，所用的講法卻都是圖形伸縮極限位置的解法，奇怪，怎麼大家都這麼有默契!!但，老王賣瓜，還是座標向量法比較直觀，對高中生來說，此解法比較有脈絡可尋，自己可想，更何況，第 8 題用此法解出後，第 9 題只是附產物，不必再像「數播」上的解法一樣，把 8、9 兩題視爲獨立的題目。

本　文

（一）取座標系如圖:



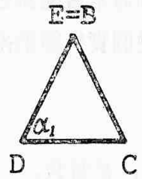
圖中各點坐標爲

$B(1+2\cos(\pi-\alpha),2\sin(\pi-\alpha))=(1-2\cos\alpha,2\sin\alpha)$

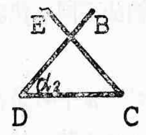
$C(1,0)$, $D(-1,0)$, $E(-1+2\cos\alpha,2\sin\alpha)$。

（二）則 $\overline{EB}$ 的中點$M(0,2\sin\alpha)$，在y軸上，且 E,B,M 三點縱坐標相同，故 $\overline{EB}$以y軸爲垂直平分線。又因 $\overline{EA}=\overline{BA}=2$，故$D$在$y$軸上。

（三）爲了要構成凸五邊形，首先畫 $\overline{ED},\overline{CB}$時，兩線段是不能呈現如圖一，甚至圖二的局勢，而$\alpha_1>\alpha_2$, $\alpha_1=60^\circ$（∵ $\overline{DC}=\overline{CB}=\overline{DE}=2$）故$\alpha>60^\circ$，此爲第一限制。



圖一



圖二

（四）再作A點時，要過 E,B 各畫長度爲 2 的線段，此二線段要相交才得A點，此限制卽是$2,2,\overline{EB}$三數要構成△的三邊，寫成代數式是$2+2>\overline{EB}$。又

$$\overline{EB}=1-2\cos\alpha-(-1+2\cos\alpha)=2-4\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow 4>2-4\cos\alpha$$

$$\Longrightarrow \cos\alpha>-1/2 \Longrightarrow \alpha<120^\circ$$

此爲第二限制。

（五）$\triangle AEB$ 要在 $\overline{EB}$ 的上側才可，如圖的內角γ要小於α，否則A將在 $\overline{EC}$ 的下側，不成凸五邊形了，讀者可自己動手取$\gamma\geq\alpha$畫畫看就了解了。

（六）$\gamma<\alpha \Longleftrightarrow \cos\gamma>\cos\alpha$。（又$\gamma$是銳角，這是當然的，何故？因爲它是等腰$\triangle AEB$ 的內角）

（七）嘗試把$\cos\gamma$表出。對$\triangle AEB$, $\overline{EB}=2-4\cos\alpha$，則

$$\cos\gamma=\frac{2^2+EB^2-2^2}{2\cdot2\cdot EB}=\frac{EB}{4}=\frac{1-2\cos\alpha}{2}。$$

（八）$\cos\gamma=\dfrac{1-2\cos\alpha}{2}>\cos\alpha$

$$\Longrightarrow \cos\alpha<\frac{1}{4}=0.25<0.2588=\cos 75°$$

$\Longrightarrow \alpha>75°$，此爲第三個限制。

（九）到此爲止，凸五邊形已造出，把過程中的所有限制交集得 $75°<\alpha<120°$。

（十）附帶的，第9題，$\angle BAE=\beta$，觀察本題的幾個選項(A)、(B)、(C)、(D)、(E)，欲決定何者爲眞，只要 β 的正弦卽可，但因 $\beta=\pi-2\gamma$ 而 $\cos\gamma$ 已算出，故不妨改寫如

$$\gamma=(\pi-\beta)/2$$

$$\Longrightarrow \cos\gamma=\sin\frac{\beta}{2}=\frac{1-2\cos\alpha}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\beta}{2}=\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1-\cos\alpha}{2} \Longrightarrow \beta=2\mathrm{Sin}^{-1}\frac{1-2\cos\alpha}{2}$$

(作者現爲新竹女中數學教師)