射影平面六講 —— 第一講

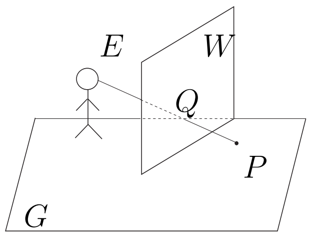
王九逵

1999年暑假, 中央大學數學系舉辦「中學教師暑期數學研習營」, 邀我以射影平面爲題做了六次講演, 每次一小時, 這便是那次的講稿。其中前五講以解析幾何的立場介紹平面射影幾何的梗概, 只是沒有觸及二次曲線。第六講引進橢圓型的非歐幾何。

六講全是標準的題材。只有 Desargues 定理的證明是我自行做出的, 所以有可能是一個新的證明。

法國幾何學家 Jean-Victor Poncelet (1788-1867) 在拿破崙的軍中服役, 進攻俄國時被俘。於 1822-1824 年被關在俘虜營中, 無書可讀, 因此他可以讓思想自由奔放, 不受傳統幾何的拘束。於 1824 年返回法國後, 發表了一套新的幾何學, 便是我們要講的射影幾何學。

設想如圖一所示, Poncelet 站在窗前觀看室外的景物。忽略地球的曲率, 假設窗外地面在一個平面 G 上。把窗外地面上的任一點 P 和 Poncelet 的眼睛 E 連線, 這線和窗玻璃所在的平面 W 交於一點 Q。讓 Q 和 P 對應。這對應稱爲以 E 爲眼點從平面 G 到平面 W 的 *透視對應* (perspectivity)。以下我們用 σ 表示它, 於是在這對應下, Q 是 P 的像, 我們記作 $Q=\sigma P$.



圖一

注意, 在透視對應 σ 之下, 不限於窗外的點才有像。依照上面 σ 的定義方法, 知位於 Poncelet 和窗間地面 G 上的點都對應到 W 在地面下的部分, 而在 Poncelet 背後 G 上的點, 則對應到 W 上比 E 更高的點。只有通過 Poncelet 立足點而平行於 W 的直線 i 上的點在 σ 對應下沒有像。

反之, 對 W 上的任一點 Q, 連接 EQ 交 G 於點 P。則 $Q=\sigma P$。但若 EQ 和 G

平行, 這項作圖便失敗了。所以 W 上和 E 等高的點都不是 G 上的點的像。這些點形成一直線 j。

令 l 爲 G 上的一條直線。將 E 和 l 的各點相連, 便決定了一個平面。這平面與 W 交於一直線, 這直線便是 l 的像 σl。

若 m 是 G 上的另一條直線, P 是 l 和 m 的交點, 則 σP 也是 σl 和 σm 的交點。現在考慮 l 和 m 平行的情形。這時 σl 和 σm 仍然可能有一個交點。以下我們想把這交點找出來。過 E 作一條與 l 和 m 都平行的直線 n。則 n 上的點都和 E 等高。E 和 l 決定的平面包含著 n, E 和 m 決定的平面也包含著 n。因此 σl 和 σm 的交點必是 n 和 W 的交點; 這交點在直線 j 上。反之, 若 l 和 m 的交點 P 落在直線 i 上, 則 σl 和 σm 是一對平行線。

現在設想 l 爲 G 上的一定線, Q 爲 G 上 l 外之一定點, P 爲在 l 上的一動點。當 P 不斷向前移動 (即與 Poncelet 在窗之異側向遠離窗之方向移動) 時, σP 從直線 j 的下方向上移動。當 P 漸行漸遠之時, 直線 QP 漸漸接近於平行的位置, 而點 σP 也漸漸從直線 j 的下方接近於j。若令 P 向後移動, 則 σP 從直線 j 的上方向下移動。當 P 漸行漸遠之時, 直線 QP 和點 σP 的狀況也和上文所述的相當類似。這種考慮使 Poncelet 想到在平面上添加一些 *無限遠點* (points at infinity), 作爲平行線的交點, 便可把平行線的觀念統合在不平行線的觀念以內。添加無限遠點後, 歐氏平面便變成了 *射影平面* (projective plane)。以下我們不用 Poncelet 的原始討論, 而改採解析幾何的立場, 介紹如何添加無限遠點的方法。

在歐氏平面中引入直角座標系。令 $P=(x,y)$ 爲平面上的一點。再設 (ξ_0,ξ_1,ξ_2) 爲三實數, 其中 $\xi_0\neq 0$。若

$$x=\frac{\xi_1}{\xi_0},\qquad y=\frac{\xi_2}{\xi_0},\tag{1}$$

我們便稱三維向量 $\xi=(\xi_0,\xi_1,\xi_2)$ 爲點 P 的一組 *齊次座標* (homogeneous coordinates)。對應於這名詞, 原來的 (x,y) 也可以稱爲 P 的 *非齊次* (inhomogeneous) 座標。顯然二向量 (ξ_0,ξ_1,ξ_2) 和 (η_0,η_1,η_2) 爲同一點的兩組齊次座標的充要條件是有一實數 $\lambda\neq 0$, 使

$$\eta_i=\lambda\xi_i,\qquad i=0,1,2.\tag{2}$$

以下我們將 ξ_1 和 ξ_2 固定, 而令 ξ_0 變化。以 (ξ_0,ξ_1,ξ_2) 爲齊次座標的點 P 的非齊次座標爲 $(\xi_1/\xi_0,\xi_2/\xi_0)$。設 P_0 爲以 (ξ_1,ξ_2) 爲非齊次座標的點。連接原點和 P_0 成一直線 l。對一切 ξ_0, P 點始終在直線 l 上。當 ξ_0 取負值, 且其絕對值很大時, P 很接近原點, 但和 P_0 在原點的異側。當 ξ_0 取負值時, P 仍維持和 P_0 在原點的異側, 而且隨 $|\xi_0|$ 變小而漸行漸遠。當它變成 0 時, 點 P 沒有定義。當它變成正數時, 它又有定義了, 成爲和 P_0 在原點同側的 l 上的一點。ξ_0 取很小的正值 時, P 離原點很遠。當 ξ_0 增加到 1 時, P 便和 P_0 重合。當 ξ_0 增加超過 1 時, P 點逐漸靠近原點。這些想法提示我們在直線 l 上增加一點, 以$(0,\xi_1,\xi_2)$ 爲其齊次座標。

現在我們要用數學家嚴謹的要求, 仔細定義射影平面。在集合 $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 我

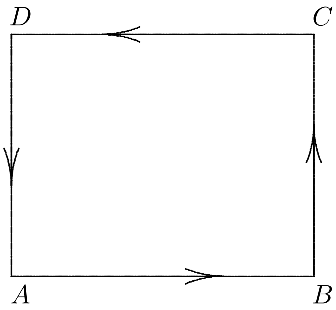
們定義 *同值關係* (equivalence relation) $(\xi_0,\xi_1,\xi_2)\approx(\eta_0,\eta_1,\eta_2)$ 如下:

$$\xi_0:\eta_0=\xi_1:\eta_1=\xi_2:\eta_2.$$

換言之, 關係 $\approx$ 成立的充要條件是有一個實數 $\lambda\neq 0$ 存在, 使 (2) 式成立。在這個同值關係下, $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 便被劃分成很多 *同值類* (equivalence class), 兩點落在同一個同值類中的充要條件是它們滿足同值關係 $\approx$。在上述的同值關係 $\approx$ 下每個同值類是通過原點的一條直線 (但原點被剔除)。反之, 每條通過原點的直線都代表一個同值類。除原點外, 線上的每一點都將這同值類完全決定。我們定義 *射影平面* (projective plane) $\mathbb{P}$ 爲同值關係 $\approx$ 的所有同值類的集合, 而將向量 $(\xi_0,\xi_1,\xi_2)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ 所在的同值類稱爲 $\mathbb{P}$ 中以 (ξ_0,ξ_1,ξ_2) 爲齊次座標的點, 向量 (ξ_0,ξ_1,ξ_2) 稱爲該點的一個 *齊次* (homogeneous) *座標向量* (coordinate vector)。

歐氏平面 $\mathbb{R}^2$ 可以嵌入射影平面 $\mathbb{P}$ 內, 方法是將點 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 對應到 $\mathbb{P}$ 中由 $(1,x,y)$ 所代表的點。這對應是一一對應。只有齊次座標呈 $(0,\xi_1,\xi_2)$ 形的點不在像集合內。這些點便是前文所談的無限遠點。從射影幾何的觀點, 我們儘可能不把無限遠點特殊化 — 在 $\mathbb{P}$ 中兩條相異的直線有且僅有一個交點, 這交點自然可以是自歐氏空間嵌入的點, 也可以是無限遠點。當然, 我們還沒有詳細討論有關直線的事。這是我們在下一講中要仔細討論的。

現在我們討論 $\mathbb{P}$ 的拓撲形狀。在 $\mathbb{R}^3$ 中取單位球 S。則通過原點的每條直線均爲 S 的直徑, 和 S 交於直徑的兩端。這樣的兩個端點叫作 S 的 *對蹠點* (antipodal points)。所以我們可以把 $\mathbb{P}$ 看成 S, 但把每對對蹠點都視成等同。



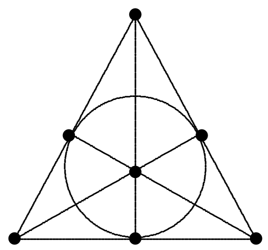
圖二

想像 S 由富彈性的薄膜製成。我們將 S 中赤道以下的半球剪掉, 保留赤道及上半球。則除赤道上相對的兩個點代表 $\mathbb{P}$ 的一個點外, 其他的點和 $\mathbb{P}$ 的某些點間有一個一一對應。我們把半球壓到和赤道同一平面上, 再把赤道拉扯成正方形, 則如圖二將正方形的上下邊依箭頭的方向黏合, 左右邊也依箭頭的方向黏合 (當然這種黏合只能想像, 不能在歐氏空間裡做到), 便得到和射影平面 *同胚* (homeomorphic) 的一個圖形。

射影平面的觀念有種種的推廣。首先, 設 n 爲正整數。在集合 $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ 我們定義同值關係 $(\xi_0,\xi_1,\ldots\xi_n)\approx(\eta_0,\eta_1,\ldots\eta_n)$ 如下:

$$\xi_0:\eta_0=\xi_1:\eta_1=\cdots=\xi_n:\eta_n.$$

我們定義 *n 維射影空間* (projective n-space) 爲同值關係 $\approx$ 的所有同值類的集合。



圖三

其次, 實數體 $\mathbb{R}$ 也可以用別的體來代替, 於是我們有在不同體上面的不同維數的射影空間。例如複數體 $\mathbb{C}$ 上的 1 維射影空間便是複變數函數論中所講的 Riemann 球, 而只含 2 元素的體 $\mathbb{Z}_2$ 上的射影平面是一個只含 7 個點和 7 條線的幾何結構, 其中的點和線見圖三。這只含 7 點的射影平面是 G. Fano 引進的。

—本文作者為國立中央大學數學系退休教授—