連續整數冪次和公式的另類思考

李政豐

一、緣起

當我們看到高中數學第一冊課本的平方和、立方和公式:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

我們聯想到有沒有 n 項 t 方和的一般化公式? 它有沒有比較容易的計算方法? 進一步瞭解, 它要用到 ZETA 函數、伯努力數、伯努力數的生成函數, 我們感覺到有相當的困難度, 計算也不簡單。我們也看到天津大學趙建林教授、王惠敏教授的書「自然數的組合積的和及其應用」, 在討論同一個問題時, 用到高階行列式, 而且是相當高的複雜度, 計算也困難。於是我們嘗試導出「連續整數冪次和公式」的另一個方法, 經由一段時候的努力, 我們得到一些結果。

例如: 求 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{10} = 1^{10} + 2^{10} + 3^{10} + \cdots + n^{10}$ 的連續整數冪次和公式?

解: 令 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^{10} = a_{11}n^{11} + a_{10}n^{10} + a_9n^9 + \cdots + a_2n^2 + a_1n$

我們可藉由下文所討論的演算法則導出: 當冪次10是偶數時

(1) 它的偶次項係數是有規則的, $a_{10} = \frac{1}{2}$, 其他偶次項係數皆爲0。

(2) 奇次項係數公式, 是藉由以下所討論的聯立方程組的解所導出的: 在求 $\sum_{k=1}^{n} k^s = \sum_{i=1}^{s+1} a_i n^i$ 中, n^i 的係數 a_i 的一般化公式爲:

$$a_{s+1} = \frac{1}{s+1}, \qquad a_{s-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{P_1^s}{P_1^3},$$
$$a_{s-3} = \frac{-1}{12}\cdot\frac{P_3^s}{P_3^5}, \quad a_{s-5} = \frac{1}{12}\cdot\frac{P_5^s}{P_5^7},$$
$$a_{s-7} = \frac{-3}{20}\cdot\frac{P_7^s}{P_7^9}, \quad a_{s-9} = \frac{5}{12}\cdot\frac{P_9^s}{P_9^{11}}$$

其中 P_m^n 是代表 n 中取 m 的排列數, 把 $s = 10$ 代入, 得到

$$a_{11} = \frac{1}{11}, \quad a_9 = \frac{5}{6}, \quad a_7 = -1,$$
$$a_5 = 1, \quad a_3 = \frac{-1}{2}, \quad a_1 = \frac{5}{66}$$

由此得到:

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7$$

$$+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n$$

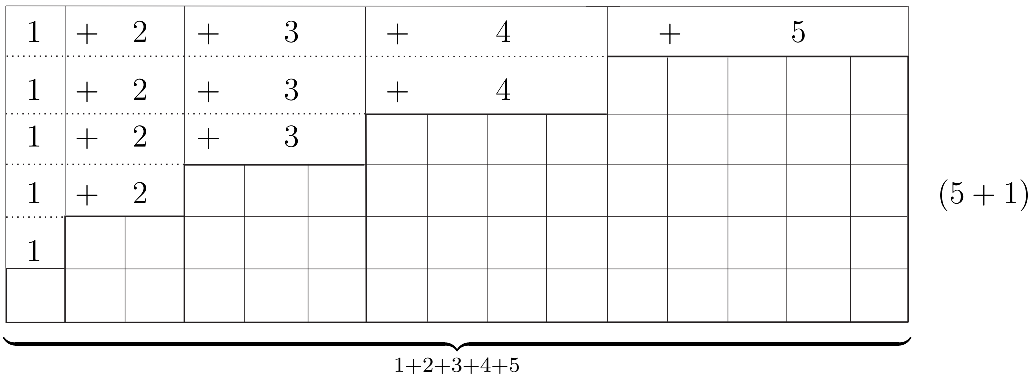
二、探討過程

(甲) 我們先由一個圖解公式的遞迴關係式談起

在高中數學課程中, 對平方、立方和公式, 大部份都是利用數學歸納法證明它, 至於如何得到公式的結果? 則幾乎都是用消去法與集項法導出來。四方和的公式因爲要用到 $((k+1)^5-k^5)$ 的展開式來消去與集項, 並且要利用到一次方和、平方和、立方和公式導出來, 因此在過度繁雜的情況下, 課本就不去推導了。至於五次方以上, 那就更爲困難。於是我們一直在想, 在高中生可以瞭解的範圍內, 是不是有其他更簡便的方法可用? 我們先把平方和, 用圖解公式表示出來, 這個圖形所隱含的遞迴關係式, 立刻被交大應數系黃大原教授看出來, 於是我們用它來導出八方和以下的公式, 下面是推導的過程:

公式導引:

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



在上圖中, 利用矩形的面積來看: 大矩形的長是 $(1+2+3+4+5)$ 寬是 $(5+1)$。則5個正方形面積和等於大矩形面積減掉五個長條形的面積:

$$\begin{aligned}&(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2)\\=&(1+2+3+4+5)(5+1)-[(1)+(1+2)\\&+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3\\&+4+5)]\end{aligned}$$

如果把大矩形長的度量, 由5個數的和增加到 n 個數的和, 把寬變爲 $(n+1)$, 這種一般化的結果可得到:

令

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)$$

則

$$S_n=(1+2+3\cdots+n)(n+1)-[(1)$$

$$+(1+2)+(1+2+3)+\cdots$$

$$\begin{aligned}&+(1+2+3+\cdots+n)]\\ &=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n+1)-\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}\\ &=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n+1)-\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\Big)\\ S_n&=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(n+1)-\frac{1}{2}S_n\\ &\quad-\frac{1}{2}\Big(\frac{n(n+1)}{2}\Big)\end{aligned}$$

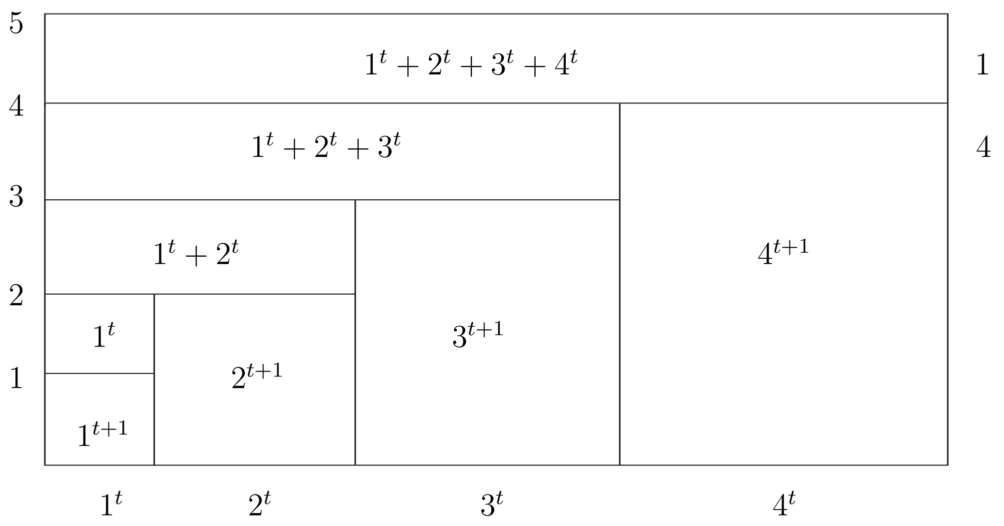
移項得

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}S_n&=\frac{n(n+1)}{2}\Big[n+1-\frac{1}{2}\Big]\\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{4}\end{aligned}$$

化簡得

$$S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

如果我把大矩形長的度量改成 $(1^t+2^t+3^t+4^t)$, 把寬變為 $(4+1)$, 這時候圖形的結果如下:



在上圖中用矩形面積來看:

$$\begin{aligned}&(1^{t+1}+2^{t+1}+3^{t+1}+4^{t+1})\\ &=(4+1)(1^t+2^t+3^t+4^t)-[((1^t)\\ &\quad+(1^t+2^t)+(1^t+2^t+3^t)\\ &\quad+(1^t+2^t+3^t+4^t)]\end{aligned}$$

如果讓 t 固定, 把大矩形之長的度量, 由 4 個數的和增加到 n 個數的和, 把寬變為 $(n+1)$, 這種一般化的結果可得到

$$\begin{aligned}&(1^{t+1}+2^{t+1}+3^{t+1}+\cdots+n^{t+1})\\ &=(n+1)(1^t+2^t+\cdots+n^t)-[(1^t)\\ &\quad+(1^t+2^t)+(1^t+2^t+3^t)+\cdots\\ &\quad+(1^t+2^t+\cdots+n^t)] \qquad \text{(A)}\end{aligned}$$

(A) 式是重要的遞迴關係式: 當 t 是自然數時, 它可以幫我們一步一步的導出, 級數 $\sum_{k=1}^{n}k^t=1^t+2^t+3^t+\cdots+n^t$, $t\in N$

的 t 方和公式, 並且能夠簡化許多計算。

例如當 $t=3$ 時:

$$\begin{aligned}&1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4\\&=(n+1)(1^3+2^3+\cdots+n^3)\\&\quad-[(1^3)+(1^3+2^3)+(1^3+2^3+3^3)\\&\quad+\cdots+(1^3+2^3+\cdots+n^3)]\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n k^4=(n+1)\Big[\sum_{k=1}^n k^3\Big]-\Big[\sum_{k=1}^n \frac{k^2(k+1)^2}{4}\Big]$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^4=(n+1)\Big[\sum_{k=1}^n k^3\Big]-\Big[\frac{1}{4}\Big(\sum_{k=1}^n k^4\Big)\\+\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^n k^3\Big)+\frac{1}{4}\Big(\sum_{k=1}^n k^2\Big)\Big]\end{aligned}$$

移項得

$$\begin{aligned}\frac{5}{4}\Big[\sum_{k=1}^n k^4\Big]&=\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big[\sum_{k=1}^n k^3\Big]\\&\quad-\frac{1}{4}\Big(\sum_{k=1}^n k^2\Big)\\\Big[\sum_{k=1}^n k^4\Big]&=\frac{4}{5}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big[\sum_{k=1}^n k^3\Big]\\&\quad-\frac{1}{5}\Big(\sum_{k=1}^n k^2\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^4&=\frac{4}{5}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big(\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\Big)\\&\quad-\frac{1}{5}\Big(\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\Big)\\\sum_{k=1}^n k^4&=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}\\&=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n\end{aligned}$$

爲了方便瞭解它的規律性, 我們把利用這個遞迴關係式, 所導出來的, 四方和到六方和公式整理如下:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^4&=\frac{4}{5}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big[\sum_{k=1}^n k^3\Big]-\frac{1}{5}\Big(\sum_{k=1}^n k^2\Big)\\&=\frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}\\&=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n\\\sum_{k=1}^n k^5&=\frac{5}{6}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big[\sum_{k=1}^n k^4\Big]\\&\quad-\frac{5}{18}\Big(\sum_{k=1}^n k^3\Big)+\frac{1}{36}\Big(\sum_{k=1}^n k\Big)\\&=\frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12}\\&=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2\\\sum_{k=1}^n k^6&=\frac{6}{7}\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\cdot\Big[\sum_{k=1}^n k^5\Big]\\&\quad-\frac{5}{14}\Big(\sum_{k=1}^n k^4\Big)+\frac{1}{14}\Big(\sum_{k=1}^n k^2\Big)\\&=\frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42}\\&=\frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n\end{aligned}$$

(乙) 一般化公式的證明與求解

我們想將它一般化, 推導出 $\sum_{k=1}^n k^s$ $(s\in N)$ 通用公式的演算法則。設

$$\begin{aligned}&0^s+1^s+2^s+3^s+\cdots+n^s\\&=a_{s+1}n^{s+1}+a_sn^s+\cdots+a_1n+a_0,\end{aligned}$$

把上式兩邊的 n 用0代入, 得 $a_0=0$。故假設

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^s&=1^s+2^s+3^s+\cdots+n^s\\&=a_{s+1}n^{s+1}+a_sn^s+\cdots+a_1n\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1} a_i n^i$$

令

$$f(x)=\sum_{i=1}^{s+1} a_i x^i$$

是一個多項式, 使得

$$f(n)=\sum_{i=1}^{s+1} a_i n^i=\sum_{k=1}^{n} k^s,$$

其中 n 是任意一個正整數, 設多項式

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)-f(x-1)\\ &= \sum_{i=1}^{s+1} a_i(x^i-(x-1)^i), \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} g(n) &= f(n)-f(n-1)\\ &= \sum_{i=1}^{s+1} a_i(n^i-(n-1)^i) \end{aligned}$$

但是 $g(n)=f(n)-f(n-1)=(1^s+2^s+3^s+\cdots+n^s)-(1^s+2^s+3^s+\cdots+(n-1)^s)=n^s$, 故 $g(x)=\sum_{i=1}^{s+1} a_i(x^i-(x-1)^i)=x^s$, 它是一個變數爲 x 的多項式恆等式。

對一個比 s 小的自然數 j, 則令 $g(x)$ 的第 j 次導函數是 $g^{(j)}(x)$, 並且

$$\begin{aligned} g^{(j)}(x) &= \sum_{i=j+1}^{s+1} \frac{i!}{(i-j)!} a_i(x^{i-j}-(x-1)^{i-j})\\ &= \frac{s!}{(s-j)!} x^{s-j} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{cases} g^{(j)}(1)=\sum\limits_{i=j+1}^{s+1} \frac{i!}{(i-j)!} a_i=\frac{s!}{(s-j)!}\\ g^{(j)}(0)=\sum\limits_{i=j+1}^{s+1} \frac{i!}{(i-j)!}(-1)^{i-j+1} a_i=0 \end{cases}$$

由此可推得

$$\begin{aligned} & g^{(j)}(1)+g^{(j)}(0)\\ &= \sum_{i=j+1}^{s+1} \frac{i!}{(i-j)!}(1+(-1)^{i-j+1})a_i\\ &= \frac{s!}{(s-j)!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & g^{(j)}(1)-g^{(j)}(0)\\ &= \sum_{i=j+1}^{s+1} \frac{i!}{(i-j)!}(1-(-1)^{i-j+1})a_i\\ &= \frac{s!}{(s-j)!}\\ &= \sum_{i=j+1}^{s+1} \frac{i!}{(i-j)!}(1+(-1)^{i-j})a_i\\ &= \frac{s!}{(s-j)!} \end{aligned}$$

則

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\Big(g^{(j)}(1)+g^{(j)}(0)\Big)\\ &= \sum_{i=j+1}^{s+1} \frac{i!}{(i-j)!}\Big(\frac{1}{2}\Big)(1+(-1)^{i-j+1})a_i\\ &= \frac{1}{2}\frac{s!}{(s-j)!} \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\Big(g^{(j)}(1)-g^{(j)}(0)\Big)\\ &= \sum_{i=j+1}^{s+1} \frac{i!}{(i-j)!}\Big(\frac{1}{2}\Big)(1+(-1)^{i-j})a_i\\ &= \frac{1}{2}\frac{s!}{(s-j)!} \qquad (2) \end{aligned}$$

在求 $\sum_{k=1}^{n} k^s$ 的公式中, 爲簡化求係數 a_i 的聯立方程組, 把 s 分開討論。

(一) 若 s 為奇數: 由 (2) 式

$$\sum_{i=j+1}^{s+1}\left[\frac{1+(-1)^{i-j}}{2}\right]\left[\frac{i!}{(i-j)!}\right]a_i$$

$$=\frac{1}{2}\Big[g^j(1)-g^j(0)\Big]=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{(s-j)!}$$

(i) 取微分次數 $j=s-2, s-4, s-6, \ldots, 1$, 搭配 $\frac{g(1)+g(0)}{2}=\frac{1}{2}$ 的方程式, 可解得 $a_s=\frac{1}{2}$, $a_{s-2}=a_{s-4}=a_{s-6}=a_{s-8}\cdots=0$。

(ii) 取微分次數 $j=s-1, s-3, s-5, \ldots, 2$, 搭配 $\frac{g(1)-g(0)}{2}=\frac{1}{2}$ 的方程式, 可解得 $a_{s+1}=\frac{1}{s+1}$, 及 $a_{s-1}, a_{s-3}, \ldots, a_2$ 的值。

例如: 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^7=a_8n^8+a_7n^7+a_6n^6+a_5n^5+a_4n^4+a_3n^3+a_2n^2+a_1n^1$

$$\text{由 (i):}\begin{cases}(j=5) & \frac{7!}{(7-5)!}a_7+0+0+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{7!}{(7-5)!}\\ (j=3) & \frac{7!}{(7-3)!}a_7+\frac{5!}{(5-3)!}a_5+0+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{7!}{(7-3)!}\\ (j=1) & \frac{7!}{(7-1)!}a_7+\frac{5!}{(5-1)!}a_5+\frac{3!}{(3-1)!}a_3+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{7!}{(7-1)!}\\ \frac{g(1)+g(0)}{2} & a_7+a_5+a_3+a_1=\frac{1}{2}\end{cases}$$

解得 $a_7=\frac{1}{2}, a_5=0, a_3=0, a_1=0$。

$$\text{由 (ii):}\begin{cases}(j=6) & \frac{8!}{(8-6)!}a_8+0+0+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{7!}{(7-6)!}\\ (j=4) & \frac{8!}{(8-4)!}a_8+\frac{6!}{(6-4)!}a_6+0+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{7!}{(7-4)!}\\ (j=2) & \frac{8!}{(8-2)!}a_8+\frac{6!}{(6-2)!}a_6+\frac{4!}{(4-2)!}a_4+0=\frac{1}{2}\cdot\frac{7!}{(7-2)!}\\ \frac{g(1)-g(0)}{2} & a_8+a_6+a_4+a_2=\frac{1}{2}\end{cases}$$

解得 $a_8=\frac{1}{8}, a_6=\frac{7}{12}, a_4=\frac{-7}{24}, a_2=\frac{1}{12}$。

(二) 若 s 為偶數: 由 (2) 式

$$\sum_{i=j+1}^{s+1}\left[\frac{1+(-1)^{i-j}}{2}\right]\left[\frac{i!}{(i-j)!}\right]a_i$$
$$=\frac{1}{2}\Big[g^{(i)}(1)-g^{(i)}(0)\Big]=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{(s-j)!}$$

(iii) 取 $j=s-2,\ s-4,\ s-6,\ \ldots,\ 2$, 搭配 $\frac{g(1)-g(0)}{2}=\frac{1}{2}$ 的方程式, 可解得 $a_s=\frac{1}{2}$, $a_{s-2}=a_{s-4}=a_{s-6}=\cdots=a_2=0$。

(iv) 取 $j=s-1,\ s-3,\ s-5,\ \ldots,\ 1$, 搭配 $\frac{g(1)+g(0)}{2}=\frac{1}{2}$ 的方程式, 可解得 $a_{s+1}=\frac{1}{s+1}$, 及 $a_{s-1}, a_{s-3}, a_{s-5}, \ldots, a_1$ 的值。

例如: 求 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^8 = a_9n^9 + a_8n^8 + a_7n^7 + a_6n^6 + a_5n^5 + a_4n^4 + a_3n^3 + a_2n^2 + a_1n^1$

$$\text{由 (iii):}\begin{cases} (j=6) & \dfrac{8!}{(8-6)!}a_8 + 0 + 0 + 0 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8!}{(8-6)!} \\ (j=4) & \dfrac{8!}{(8-4)!}a_8 + \dfrac{6!}{(6-4)!}a_6 + 0 + 0 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8!}{(8-4)!} \\ (j=2) & \dfrac{8!}{(8-2)!}a_8 + \dfrac{6!}{(6-2)!}a_6 + \dfrac{4!}{(4-2)!}a_4 + 0 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8!}{(8-2)!} \\ \dfrac{g(1)-g(0)}{2} & a_8 + a_6 + a_4 + a_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

解得 $a_8 = \frac{1}{2}, a_6 = 0, a_4 = 0, a_2 = 0$。

$$\text{由 (iv):}\begin{cases} (j=7) & \dfrac{9!}{(9-7)!}a_9 + 0 + 0 + 0 + 0 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8!}{(8-7)!} \\ (j=5) & \dfrac{9!}{(9-5)!}a_9 + \dfrac{7!}{(7-5)!}a_7 + 0 + 0 + 0 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8!}{(8-5)!} \\ (j=3) & \dfrac{9!}{(9-3)!}a_9 + \dfrac{7!}{(7-3)!}a_7 + \dfrac{5!}{(5-3)!}a_5 + 0 + 0 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8!}{(8-3)!} \\ (j=1) & \dfrac{9!}{(9-1)!}a_9 + \dfrac{7!}{(7-1)!}a_7 + \dfrac{5!}{(5-1)!}a_5 + \dfrac{3!}{(3-1)!}a_3 + 0 \\ & \quad = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8!}{(8-1)!} \\ \dfrac{g(1)+g(0)}{2} & a_9 + a_7 + a_5 + a_3 + a_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

解得 $a_9 = \frac{1}{9}, a_7 = \frac{2}{3}, a_5 = \frac{-7}{15}, a_3 = \frac{2}{9}, a_1 = \frac{-1}{30}$。

綜合起來, 不論 s 是奇數或偶數, 考慮方程組 (i) (iii) 解答的一般化結果:

$$\begin{cases} \dfrac{s!}{2!}a_s + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = \dfrac{1}{2}\dfrac{s!}{2!} \\ \dfrac{2!}{4!}a_s + \dfrac{(s-2)!}{2!}a_{s-2} + 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = \dfrac{1}{2}\dfrac{s!}{4!} \\ \dfrac{s!}{6!}a_s + \dfrac{(s-2)!}{4!}a_{s-2} + \dfrac{(s-4)!}{2!}a_{s-4} + 0 + 0 + 0 + \cdots = \dfrac{1}{2}\dfrac{s!}{6!} \\ \dfrac{s!}{8!}a_s + \dfrac{(s-2)!}{6!}a_{s-2} + \dfrac{(s-4)!}{4!}a_{s-4} + \dfrac{(s-6)!}{2!}a_{s-6} + 0 + 0 + \cdots = \dfrac{1}{2}\dfrac{s!}{8!} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

解得 $a_s = \frac{1}{2}$, 且 $a_{s-2} = a_{s-4} = a_{s-6} = a_{s-8} = \cdots = 0$。

再考慮方程組 (ii) (iv) 解答的一般化結果:

$$\begin{cases} \dfrac{(s+1)!}{2!}a_{s+1}+0+0+0+0+0+0\cdots=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s!}{1!} & (1)\\ \dfrac{(s+1)!}{4!}a_{s+1}+\dfrac{(s-1)!}{2!}a_{s-1}+0+0+0+0+0\cdots=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s!}{3!} & (2)\\ \dfrac{(s+1)!}{6!}a_{s+1}+\dfrac{(s-1)!}{4!}a_{s-1}+\dfrac{(s-3)!}{2!}a_{s-3}+0+0+0+0\cdots=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s!}{5!} & (3)\\ \dfrac{(s+1)!}{8!}a_{s+1}+\dfrac{(s-1)!}{6!}a_{s-1}+\dfrac{(s-3)!}{4!}a_{s-3}+\dfrac{(s-5)!}{2!}a_{s-5}+0+0+0\cdots & \\ \quad=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s!}{7!} & (4)\\ \dfrac{(s+1)!}{10!}a_{s+1}+\dfrac{(s-1)!}{8!}a_{s-1}+\dfrac{(s-3)!}{6!}a_{s-3}+\dfrac{(s-5)!}{4!}a_{s-5}+\dfrac{(s-7)!}{2!}a_{s-7} & \\ \quad+0+0\cdots=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s!}{9!} & (5)\\ \dfrac{(s+1)!}{12!}a_{s+1}+\dfrac{(s-1)!}{10!}a_{s-1}+\dfrac{(s-3)!}{8!}a_{s-3}+\dfrac{(s-5)!}{6!}a_{s-5}+\dfrac{(s-7)!}{4!}a_{s-7} & \\ \quad+\dfrac{(s-9)!}{2!}a_{s-9}+0\cdots=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{s!}{11!} & (6)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

由方程式(1) 可得到 $a_{s+1}=\frac{1}{s+1}$, 把 $a_{s+1}=\frac{1}{s+1}$ 代入方程式 (2)

$$\frac{s!}{4!}+\frac{(s-1)!}{2!}\cdot a_{s-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{3!},$$

移項得

$$\frac{(s-1)!}{2!}\cdot a_{s-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{3!}-\frac{s!}{4!}=\frac{1}{4}\cdot\frac{s!}{3!}$$

化簡得

$$\begin{aligned} a_{s-1}&=\frac{1}{4}\cdot\frac{s!}{3!}\cdot\frac{2!}{(s-1)!}\\ &=\frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{s!}{(s-1)!}}{\frac{3!}{2!}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{P_1^s}{P_1^3}=\frac{1}{12}\cdot s \end{aligned}$$

把 $a_{s+1}=\frac{1}{s+1}$, $a_{s-1}=\frac{1}{12}s$ 代入方程式 (3),

$$\frac{s!}{6!}+\frac{(s-1)!}{4!}\cdot(\frac{1}{12}s)+\frac{(s-3)!}{2!}a_{s-3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{5!}$$

移項得

$$\begin{aligned} \frac{(s-3)!}{2!}a_{s-3}&=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{5!}-\frac{s!}{6!}-\frac{1}{12\cdot 4!}\cdot s!\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{5!}-\frac{1}{6}\cdot\frac{s!}{5!}-\frac{5}{12}\cdot\frac{s!}{5!}\\ &=\frac{-1}{12}\cdot\frac{s!}{5!} \end{aligned}$$

化簡得

$$\begin{aligned} a_{s-3}&=(-\frac{1}{12})\cdot\frac{s!}{5!}\cdot\frac{2!}{(s-3)!}\\ &=(-\frac{1}{12})\frac{\frac{s!}{(s-3)!}}{\frac{5!}{2!}}=\frac{-1}{12}\cdot\frac{P_3^s}{P_3^5} \end{aligned}$$

把 $a_{s+1}=\frac{1}{s+1}$, $a_{s-1}=\frac{s}{12}$, $a_{s-3}=\frac{-1}{12}\cdot\frac{P_3^s}{P_3^5}$

代入方程式 (4)

$$\frac{s!}{8!}+\frac{s!}{12\cdot 6!}+\frac{(s-3)!}{4!}\cdot\frac{-1}{12}\cdot\frac{P_3^s}{P_3^5}+\frac{(s-5)!}{2!}\cdot a_{s-5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{7!}$$

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{s!}{7!}+\frac{7}{12}\cdot\frac{s!}{7!}+(\frac{-7}{24})\cdot\frac{s!}{7!}+\frac{(s-5)!}{2!}\cdot a_{s-5}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{7!}$$

移項得

$$\frac{(s-5)!}{2!}a_{s-5}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{7}{12}+\frac{7}{24})\frac{s!}{7!}$$

化簡

$$\begin{aligned}a_{s-5}&=(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{7}{12}+\frac{7}{24})\frac{s!}{7!}\cdot\frac{2!}{(s-5)!}\\&=\frac{1}{12}\cdot\frac{\frac{s!}{(s-5)!}}{\frac{7!}{2!}}=\frac{1}{12}\cdot\frac{P_5^s}{P_5^7}\end{aligned}$$

把 $a_{s+1}=\frac{1}{s+1}$, $a_{s-1}=\frac{s}{12}$, $a_{s-3}=\frac{-1}{12}\cdot\frac{P_3^s}{P_3^5}$, $a_{s-5}=\frac{1}{12}\cdot\frac{P_5^s}{P_5^7}$, 代入方程式 (5)

$$\frac{s!}{10!}+\frac{(s-1)!}{8!}\cdot\frac{s}{12}+\frac{(s-3)!}{6!}\cdot\frac{-1}{12}\cdot\frac{P_3^s}{P_3^5}+\frac{(s-5)!}{4!}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{P_5^s}{P_5^7}+\frac{(s-7)!}{2!}\cdot a_{s-7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{9!}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{10}\cdot\frac{s!}{9!}+\frac{9}{12}\cdot\frac{s!}{9!}+\frac{1}{6!}\cdot\frac{-1}{12}\cdot\frac{s!}{5\times 4\times 3}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{s!}{7\times 6\times 5\times 4\times 3}+\frac{(s-7)!}{2!}a_{s-7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{9!}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{10}\cdot\frac{s!}{9!}+\frac{9}{12}\cdot\frac{s!}{9!}-\frac{7}{10}\cdot\frac{s!}{9!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{9!}+\frac{(s-7)!}{2!}a_{s-7}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{9!}$$

移項得

$$\frac{(s-7)!}{2!}a_{s-7}=(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{9}{12}+\frac{7}{10}-\frac{1}{2})\cdot\frac{s!}{9!}$$

化簡

$$\begin{aligned}a_{s-7}&=\frac{-3}{20}\cdot\frac{s!}{9!}\cdot\frac{2!}{(s-7)!}\\&=\frac{-3}{20}\cdot\frac{\frac{s!}{(s-7)!}}{\frac{9!}{2!}}=\frac{-3}{20}\cdot\frac{P_7^s}{P_7^9}\end{aligned}$$

把 $a_{s+1}=\frac{1}{s+1}$, $a_{s-1}=\frac{s}{12}$, $a_{s-3}=\frac{-1}{12}\cdot\frac{P_3^s}{P_3^5}$, $a_{s-5}=\frac{1}{12}\cdot\frac{P_5^s}{P_5^7}$, $a_{s-7}=\frac{-3}{20}\cdot\frac{P_7^s}{P_7^9}$ 代入方程式 (6),

$$\frac{s!}{12!}+\frac{(s-1)!}{10!}\cdot\frac{s}{12}+\frac{(s-3)!}{8!}\cdot\frac{-1}{12}\cdot\frac{P_3^s}{P_3^5}+\frac{(s-5)!}{6!}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{P_5^s}{P_5^7}+\frac{(s-7)!}{4!}\cdot\frac{-3}{20}\cdot\frac{P_7^s}{P_7^9}+\frac{(s-9)!}{2!}a_{s-9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{11!}$$

推得

$$\frac{1}{12}\cdot\frac{s!}{11!}+\frac{11}{12}\cdot\frac{s!}{11!}-\frac{11}{8}\cdot\frac{s!}{11!}+\frac{11}{6}\cdot\frac{s!}{11!}-\frac{11}{8}\cdot\frac{s!}{11!}+\frac{(s-9)!}{2!}a_{s-9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{s!}{11!}$$

移項得

$$\begin{aligned}&\frac{(s-9)!}{2!}a_{s-9}\\&=(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}-\frac{11}{12}+\frac{11}{8}-\frac{11}{6}+\frac{11}{8})\frac{s!}{11!}\\&=\frac{5}{12}\cdot\frac{s!}{11!}\cdot\frac{2!}{(s-9)!}\end{aligned}$$

化簡得

$$a_{s-9}=\frac{5}{12}\cdot\frac{\frac{s!}{(s-9)!}}{\frac{11!}{2!}}=\frac{5}{12}\cdot\frac{P_9^s}{P_9^{11}}$$

同理, 可解得:

$$a_{s-11}=\frac{-691}{420}\cdot\frac{P_{11}^{s}}{P_{11}^{13}},$$
$$a_{s-13}=\frac{35}{4}\cdot\frac{P_{13}^{s}}{P_{13}^{15}},$$
$$a_{s-15}=\frac{-3617}{60}\cdot\frac{P_{15}^{s}}{P_{15}^{17}},$$
$$a_{s-17}=\frac{43867}{48}\cdot\frac{P_{17}^{s}}{P_{17}^{19}},$$
$$a_{s-19}=\frac{-1222277}{220}\cdot\frac{P_{19}^{s}}{P_{19}^{21}}$$

於是我們得到所有係數一般化的解答如下:

$$a_{s+1}=\frac{1}{s+1},\qquad a_{s-1}=\frac{1}{4}\cdot\frac{P_{1}^{s}}{P_{1}^{3}},$$
$$a_{s-3}=\frac{-1}{12}\cdot\frac{P_{3}^{s}}{P_{3}^{5}},\qquad a_{s-5}=\frac{1}{12}\cdot\frac{P_{5}^{s}}{P_{5}^{7}}$$
$$a_{s-7}=\frac{-3}{20}\cdot\frac{P_{7}^{s}}{P_{7}^{9}},\qquad a_{s-9}=\frac{5}{12}\cdot\frac{P_{9}^{s}}{P_{9}^{11}}$$
$$a_{s-11}=\frac{-691}{420}\cdot\frac{P_{11}^{s}}{P_{11}^{13}},$$
$$a_{s-13}=\frac{35}{4}\cdot\frac{P_{13}^{s}}{P_{13}^{15}},$$
$$a_{s-15}=\frac{-3617}{60}\cdot\frac{P_{15}^{s}}{P_{15}^{17}},$$
$$a_{s-17}=\frac{43867}{48}\cdot\frac{P_{17}^{s}}{P_{17}^{19}},$$
$$a_{s-19}=\frac{-1222277}{220}\cdot\frac{P_{19}^{s}}{P_{19}^{21}}\cdots \tag{1}$$

$$a_s=\frac{1}{2}\begin{cases}\text{若 } s \text{ 爲奇數, 其他奇次}\\ \text{項係數皆爲0,}\\ \text{若 } s \text{ 爲偶數, 其他偶次}\\ \text{項係數皆爲0。}\end{cases} \tag{2}$$

如此, 即能夠解出 $\sum_{k=1}^{n} k^s$ 的公式, s 可算到20次方和以下之所有係數。

三、結語:

求「連續整數冪次和公式」, 本來就是一件困難的事, 但是用伯努力數的生成函數去計算伯努力數, 再求得連續整數冪次和公式的係數, 對學生來說已經是一件困難的事。只用高階行列式, 來計算冪次和公式的係數, 當次方變高了, 同樣是非常繁雜。

如果用課本裏的集項法與消去法, 去求冪次和公式的係數, 只要超過5次方、6次方, 幾乎算不下去了。本文中用到導函數、列簡化矩陣, 把係數公式導出來。當然係數公式前面的常數, 一定與伯努力數有倍數關係, 是不爭的事實。不懂伯努力數的同學, 或許也能看得懂。可以得到冪次和公式的一般化結果, 是令我們高興的一件事。最感謝的是交通大學應數系黃大原老師, 一路以來熱忱的指導。

參考文獻

1. 自然數的組合積的和及其應用, 趙建林、王慧敏著, 天津大學出版社。
2. 級數求和法, 中正大學余文卿教授在西松高中演講稿。
3. 一些發散級數的求和法, 中正大學余文卿教授在建國中學演講稿。

—本文作者任教於國立竹南高中—