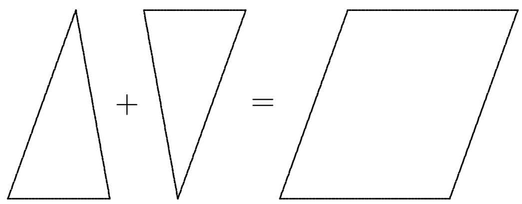
從三角求和公式到 Fourier 級數

林琦焜

1. Gauss 之啓發:

關於高斯 (Carl Friedrich Gauss 1777–1855), 最爲人所津津樂道的故事, 莫過於在小學低年級時老師要班上同學求從 1 到 100 的和等於多少。高斯很快就得到正確答案 5050。這著實令他的老師十分驚訝, 隨後高斯解釋說, 首先從 1 到 100 寫一次, 而後再從 100 到 1 倒寫回來, 兩者垂直相加, 可發現每項都是 101, 共有 100 項, $100 \times 101 = 10100$, 再除以 2 就是 5050。

誠如歷史上許多名人都有許多著名的故事, 故事的眞實性, 歷史性如何? 是否眞的發生? 我想那已經無關緊要, 重要的是這個事件本身的意義。從數學的角度而言, 高斯這個故事告訴我們思考模型的重要性, 這個問題的思考模型是階梯之個數, 或者是保齡球之球瓶數, 也就是三角形之面積, 而三角形面積的求法是將原三角形倒轉兩個合併之後, 成爲平行四邊形。



圖一

$$G_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$
$$G_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

兩者垂直相加

$$2G_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1)$$

所以

$$G_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.1}$$

在三角函數有一個著名的公式

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta \sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \tag{1.2}$$

乍看之下 (1.1), (1.2) 這兩個公式實在是太像了, 首先由等比級數求和公式可得

$$\theta+2\theta+3\theta+\cdots+n\theta=\frac{n(n+1)}{2}\theta$$

兩邊同時乘個 sin (英文罪也!)

$$\sin(\theta+2\theta+3\theta+\cdots+n\theta)=\sin\frac{n(n+1)}{2}\theta$$

再故意將 sin 分配至各項 (姑且不管乘法或加法), 左式正好是公式 (1.2) 的左式, 而右式則是 (1.2) 的分子, 因此再除以 $\sin\frac{\theta}{2}$, 正好是公式 (1.2)! 嚴格證明如下。

法一: 我們現在就嘗試利用高斯的方法來證明公式 (1.2), 令

$$\begin{aligned}S_n&=\sin\theta+\sin 2\theta+\cdots+\sin(n-1)\theta+\sin n\theta\\ S_n&=\sin n\theta+\sin(n-1)\theta+\cdots+\sin 2\theta+\sin\theta\end{aligned}$$

藉由三角公式 (將 x, y 寫成 $x=\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$, $y=\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$ 是典型的手法!)

$$\sin x+\sin y=\sin\Big(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\Big)+\sin\Big(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\Big)=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \tag{1.3}$$

兩式垂直相加

$$\begin{aligned}2S_n=2\Big[&\sin\frac{(1+n)\theta}{2}\cos\frac{(1-n)\theta}{2}+\sin\frac{(1+n)\theta}{2}\cos\frac{(3-n)\theta}{2}+\cdots\\ &+\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n-3)\theta}{2}+\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n-1)\theta}{2}\Big]\\ =2\sin&\frac{(n+1)\theta}{2}\Big[\cos\frac{(1-n)\theta}{2}+\cos\frac{(3-n)\theta}{2}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\theta}{2}\Big]\end{aligned}$$

兩邊同時乘 $\sin\frac{\theta}{2}$, 且再利用一次三角公式得

$$2S_n\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{n+1}{2}\theta\Big[\sin\frac{n}{2}\theta+\sin(1-\frac{n}{2})\theta+\cdots+\sin(\frac{n}{2}-1)\theta+\sin\frac{n}{2}\theta\Big]$$

整理得 (因爲 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$)

$$S_n=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n+1}{2}\theta$$

法二: 法一這個證明方法其實是畫蛇添足, 從最開始乘 $2\sin\frac{\theta}{2}$ 就可證明公式 (1.2)。由三角公式 $2\sin x\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$ 可得

$$\begin{aligned}2\sin\frac{\theta}{2}S_n&=\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta=\sum_{k=1}^{n}\cos(\frac{\theta}{2}-k\theta)-\cos(\frac{\theta}{2}+k\theta)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\cos(k-\frac{1}{2})\theta-\cos(k+\frac{1}{2})\theta=\cos\frac{\theta}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\theta=2\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n}{2}\theta\end{aligned}$$

故 $S_n = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \sin\frac{n+1}{2}\theta$。

一個對三角函數有眞正認識的學生, 始終是將正弦函數, 餘弦函數等齊看待的。對於餘弦函數我們也有類似的公式

$$\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \cos\frac{n+1}{2}\theta \tag{1.4}$$

(1.2), (1.4) 兩式相除可得另一個漂亮的公式

$$\frac{\sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin(n-1)\theta + \sin n\theta}{\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(n-1)\theta + \cos n\theta} = \tan\frac{n+1}{2}\theta \tag{1.5}$$

將 (1.2), (1.4) 兩式合併, 再藉由 Euler 公式

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z, \qquad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \qquad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \tag{1.6}$$

可以從等比級數的角度來證明 (1.2), (1.4) 這兩個公式。

法三: 令

$$X = \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta, \qquad Y = \sin\theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta \tag{1.7}$$

則由等比級數求和之公式可得

$$X + iY = e^{i\theta} + e^{i2\theta} + e^{i3\theta} + \cdots + e^{in\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} \tag{1.8}$$

分子分母同時乘 $e^{-i\theta/2}$

$$\begin{aligned} X + iY &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{i\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} = \frac{e^{i(n+1)\theta/2}(e^{in\theta/2} - e^{-in\theta/2})}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\ &= \frac{\frac{1}{2i}(e^{in\theta/2} - e^{-in\theta/2})}{\frac{1}{2i}(e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2})} e^{i(n+1)\theta/2} = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{n+1}{2}\theta} \end{aligned} \tag{1.9}$$

再取虛部與實部, 正是公式 (1.2), (1.4)。這個證明其實告訴我們雖然 (1.2), (1.4) 這兩個三角恆等式外表看起來像等差級數, 但本質上是一個等比級數, 至於在求和的過程中爲何要乘 $\sin\frac{\theta}{2}$, 其理由是 (1.8) 這個等比級數之公比爲 $e^{i\theta}$ 其和等於 $1 - e^{i\theta}$ 乘原級數, 而這項實際上就是 $\sin\frac{\theta}{2}$。

法四: 我們從差分 (difference) 的角度來證明公式 (1.2), 由差分的定義

$$\triangle f(x) := f(x+1) - f(x) \tag{1.10}$$

可得

$$\begin{aligned}\sum_{x=m}^{n} \triangle f(x) &= \sum_{x=m}^{n} f(x+1)-f(x)\\ &= f(m+1)-f(m)+f(m+2)-f(m+1)+\cdots+f(n+1)-f(n)\\ &= f(n+1)-f(m)=f(x)\Big|_{m}^{n+1} \qquad (1.11)\end{aligned}$$

這實際上就是微積分基本定理的差分形式。回到 (1.2) 考慮

$$\triangle \cos k\theta=\cos(k+1)\theta-\cos k\theta=\cos(k\theta+\theta)-\cos k\theta \qquad (1.12)$$

但由三角公式

$$\cos x-\cos y=\cos\Big(\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}\Big)-\cos\Big(\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}\Big)=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \qquad (1.13)$$

取 $x=(k+1)\theta$, $y=k\theta$ 則 $\triangle\cos k\theta=-2\sin\frac{\theta}{2}\sin(k+\frac{1}{2})\theta$ 再將 k 換爲 $k-\frac{1}{2}$

$$\triangle\cos(k-\frac{1}{2})\theta=-2\sin\frac{\theta}{2}\sin k\theta \qquad (1.14)$$

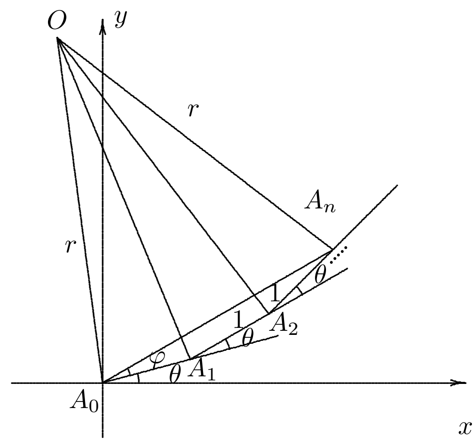
因此 S_n 可改寫爲

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{-2\sin\frac{\theta}{2}}\triangle\cos(k-\frac{1}{2})\theta=\frac{1}{-2\sin\frac{\theta}{2}}\cos(k-\frac{1}{2})\theta\Big|_{1}^{n+1} \qquad (1.15)$$

$$=\frac{1}{-2\sin\frac{\theta}{2}}\Big[\cos\frac{\theta}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\theta\Big]=\frac{1}{-2\sin\frac{\theta}{2}}\Big(-2\sin\frac{n}{2}\theta\sin\frac{n+1}{2}\theta\Big)=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n+1}{2}\theta$$

幾何意義:

關於 (1.2), (1.4) 之幾何意義可以如此看, 從原點 A_0 開始, 畫一射線 $\overrightarrow{A_0A_1}$ 與 x 軸之夾角爲 θ, 而且取 A_1 使得線段 $\overline{A_0A_1}$ 爲單位長, 由極座標可知 $A_1=(\cos\theta,\sin\theta)$, 其次, 從 A_1 爲起點畫射線 $\overrightarrow{A_1A_2}$ 與 $\overrightarrow{A_0A_1}$ 之夾角爲 θ, 並取 A_2, 使得 A_1A_2 也是單位長, 則 A_2 相對於 A_1 之座標是 $(\cos 2\theta,\sin 2\theta)$, 故 A_2 相對於 A_0 之座標 $A_2=(\cos\theta+\cos 2\theta,\ \sin\theta+\sin 2\theta)$ 依此步驟可得第 n 個點 A_n, 其



圖二

座標正好是 (X, Y), 顯然 X 是這 n 個線段之水平方向 (x 座標) 投影的和, 而 Y 則是 n 個垂直方向 (y 座標) 投影的和。$A_0, A_1, \ldots, A_n$ 這些點是內接於圓心為 O, 半徑為 r 之正多邊形的頂點, 因為每一個弦即線段 $\overline{A_{i-1}A_i}$ 與圓心所形成之角度 (相當於圓心角) 都是 θ, 所以 $\angle A_0OA_n = n\theta$, 假設線段 A_0A_n 之長度為 d, 則由等腰三角形 $\triangle A_0OA_n$ 可知 $d = 2r\sin\frac{n}{2}\theta$ 但由等腰三角形 $\triangle A_0OA_1$ 得 $1 = 2r\sin\frac{\theta}{2}$ 消去 r 得 $d = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$ 這項正好就是 X, Y (或 (1.2), (1.4)) 出現的共同項, 也就是依作圖得 A_n 與原點的距離

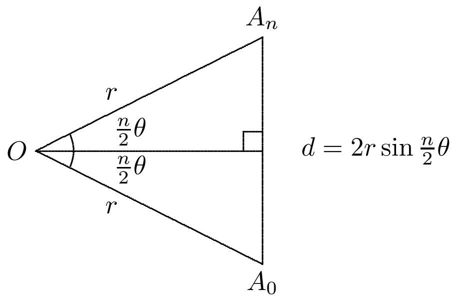
$$\overline{A_0A_n} = d = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \tag{1.16}$$

按極座標還需要角度, 假設 $\angle A_1A_0A_n = \varphi$, 則射線 $\overrightarrow{A_0A_n}$ 與 x 軸之夾角等於 $\theta + \varphi$, φ 實際上是個圓周角 (等於對應弧的一半)

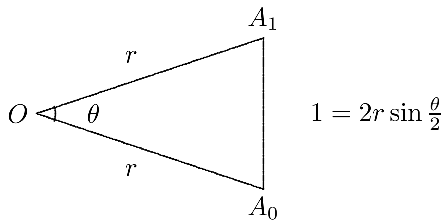
$$\varphi = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A_1A_n} = \frac{1}{2}(n-1)\theta \tag{1.17}$$

所以 $\theta + \varphi = \frac{1}{2}(n+1)\theta$, 故

$$X = d\cos(\theta+\varphi) = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n+1}{2}\theta, \quad Y = d\sin(\theta+\varphi) = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n+1}{2}\theta. \tag{1.18}$$



圖三



圖四

如果, 一開始是與 x 軸之夾角為 α 的任意直線 (不見得是 x 軸) 為作圖之起點, 則 (1.2), (1.4) 成為

$$\sin(\alpha+\theta) + \sin(\alpha+2\theta) + \cdots + \sin(\alpha+n\theta) = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin(\alpha + \frac{n+1}{2}\theta), \tag{1.19}$$

$$\cos(\alpha+\theta) + \cos(\alpha+2\theta) + \cdots + \cos(\alpha+n\theta) = \frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos(\alpha + \frac{n+1}{2}\theta). \tag{1.20}$$

因為餘弦函數平移 $\frac{\pi}{2}$ 就是正弦函數, $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$, 所以若以 $\frac{\pi}{2} + \theta$ 取代 θ, 則由 (1.20) 可得 (1.19), 若 $\alpha = 0$, 就是 (1.4), $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 當然就回到(1.2)。我們還可以考慮幾個漂亮的變

換 $(\theta\to 2\theta,\alpha\to\alpha-\theta)$, $(\theta\to 2\theta,\alpha\to\frac{\pi}{2}+\alpha-\theta)$ 則 (1.19) (1.20) 成爲

$$\cos(\alpha+\theta))+\cdots+\cos(\alpha+(2n-1)\theta)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cos(\alpha+n\theta), \tag{1.21}$$

$$\sin(\alpha+\theta)+\cdots+\sin(\alpha+(2n-1)\theta)=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\sin(\alpha+n\theta). \tag{1.22}$$

如果 $\alpha=-\frac{\theta}{2}$ 則

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k-\frac{1}{2})\theta=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{n}{2}\theta=\frac{\sin n\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}, \tag{1.23}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(k-\frac{1}{2})\theta=\frac{\sin\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\sin\frac{n}{2}\theta=\frac{\sin^2\frac{n}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}. \tag{1.24}$$

註解:

(1) 差分法 (法四) 實際上也是母函數 (generating function) 的概念。

(2) 藉由三角公式 (1.2) (1.4) 與積分的定義可以直接證明積分公式 (不必藉由微分公式與微積分基本定理)

$$\int_a^b\sin xdx=\cos a-\cos b,\qquad \int_a^b\cos xdx=\sin b-\sin a.$$

假設 $b>0$ 則由 Riemann 和

$$\begin{aligned}\int_0^b\sin xdx&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sin\frac{kb}{n})\cdot\frac{b}{n}=\lim_{n\to\infty}\theta\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta\qquad(\theta=\frac{b}{n})\\&=\lim_{n\to 0}\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}2\sin\frac{n}{2}\theta\sin\frac{n+1}{2}\theta=\lim_{n\to 0}\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\Big(\cos\frac{\theta}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})\theta\Big)\\&=\lim_{\theta\to 0}\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\Big(\cos\frac{\theta}{2}-\cos(b+\frac{1}{2}\theta)\Big)=1-\cos b.\end{aligned}$$

2. Fourier 級數與 Gibbs 現象:

三角級數和 (1.7) 它出現在德國數學家 Dirichlet (1805-1859), Riemann (1826-1866) 處理 Fourier 級數的收斂性問題。我們談一下 Fourier 級數; 已知 $f(x)$ 是任意定義在區間 $[-\pi,\pi]$ 的 2π 週期函數, 我們用三角多項式來逼近

$$s_n(x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{2.1}$$

現在的目的是選取適當的係數 a_k, b_k 使得其誤差

$$\varepsilon(x) = f(x) - s_n(x), \tag{2.2}$$

爲最小。考慮

$$\min_{a_k,b_k} M \equiv \min_{a_k,b_k} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-s_n(x)|^2 dx = \min_{a_k,b_k} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon^2 dx. \tag{2.3}$$

這是 $2n+1$ 個變數的極值問題, 分別對 a_k, b_k 微分

$$\begin{aligned} -\frac{\partial M}{\partial a_k} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))\cos kx dx, & k &= 0,1,2,3,\ldots,n, \\ -\frac{\partial M}{\partial b_k} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-s_n(x))\sin kx dx, & k &= 1,2,3,\ldots,n. \end{aligned} \tag{2.4}$$

這個聯立方程組有 $2n+1$ 個方程式, $2n+1$ 個未知數, 已知積分公式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\binom{\cos mx\cos nx}{\sin mx\sin nx} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, m=n \\ 0, m\neq n \end{cases}, \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx dx = 0, \tag{2.5}$$

代回 (2.4) 可得 Fourier 係數

$$\binom{a_k}{b_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\binom{\cos kx}{\sin kx}dx. \tag{2.6}$$

公式 (2.5) 本質上就是正交 (orthogonal), 所以從內積 (inner product) 的角度而言 Fourier 係數 a_k, b_k 正是 f 在 $\cos kx$, $\sin kx$ 之投影量。函數 f 之 Fourier 級數可以表示爲

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \tag{2.7}$$

Fourier係數 a_k, b_k 之推導除了最小二乘方 (least square method) 之外也可以這麼看; 直接積分 (2.7) 得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx\Big).$$

由 $\sin kx$, $\cos kx$ 週期性知 $\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx dx = 0$ 因此

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \quad (f\text{之平均值}).$$

同理 (2.7) 左右兩邊分別乘 $\cos nx$, $\sin nx$ 後積分並由 (2.5) 得

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

a_n 的公式也說明爲何 (2.7) 的首項要取爲 $\frac{a_0}{2}$, 而非 a_0。f 之 Fourier 級數 (2.7) 同時出現 $\cos nx$, $\sin nx$ 因此藉由 Euler 公式 (1.6) 可以改寫爲

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \Big). \tag{2.8}$$

令

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \qquad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \qquad c_{-n} = \overline{c}_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, \tag{2.9}$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi} \Big\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx - i \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \Big\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \tag{2.10}$$

同理可得

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx} dx, \tag{2.11}$$

整理之後就是複數形式的 Fourier 級數

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx. \tag{2.12}$$

我們計算一個 Fourier 級數。考慮函數

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & -\pi < x < 0 \end{cases}. \tag{2.13}$$

這是一個分段常數的函數, 且不連續的點在

$$x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots\ldots$$

f 是一個奇函數, 所以其 Fourier 級數僅包含正弦函數的部份, f 的 Fourier 係數如下 (利用複數公式)

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \Big(\int_0^{\pi} e^{-ikx} dx - \int_{-\pi}^{0} e^{-ikx} dx \Big) = \frac{1}{2\pi} \Big(\frac{e^{-ik\pi} - 1}{-ik} - \frac{1 - e^{ik\pi}}{-ik} \Big) = \frac{(-1)^k - 1}{-ik\pi}. \tag{2.14}$$

因此 $b_k = \frac{4}{k\pi}$, $k = 1, 3, 5, \ldots$, 所以 f 之 Fourier 級數爲

$$f(x) \approx \frac{4}{\pi} \Big(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \cdots \Big). \tag{2.15}$$

每個單獨的正弦函數 $\sin(2k+1)x$ 都是連續函數, 但經過無窮多次的疊加之後卻成爲不連續函數! 也因爲這緣故 Fourier 級數之收斂性有必要加以討論; 其部分和爲

$$
\begin{aligned}
S_1(x) &= \frac{4}{\pi}\sin x \\
S_3(x) &= \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x) \\
S_5(x) &= \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x) \\
&\vdots \\
S_\infty(x) &= f(x).
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

計算可知 S_1 之最大值爲

$$y = \frac{4}{\pi} \approx 1.27 \qquad (x = \frac{\pi}{2}),$$

這個值與 $y = 1$ 之誤差爲 27%, 同理 S_3 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 之最小值

$$y = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3}) \approx 0.85 \qquad (x = \frac{\pi}{2}),$$

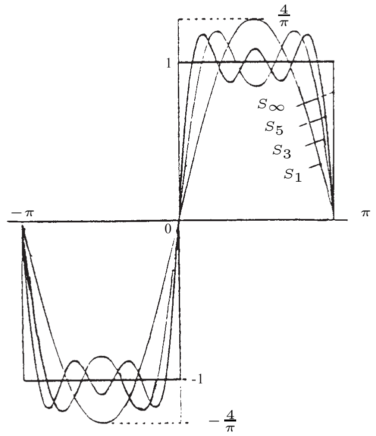
與 $y = 1$ 之誤差推進到 15%, 依此類推 S_5 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 之最大值

$$y = \frac{4}{\pi}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) \approx 1.10 \qquad (x = \frac{\pi}{2}),$$

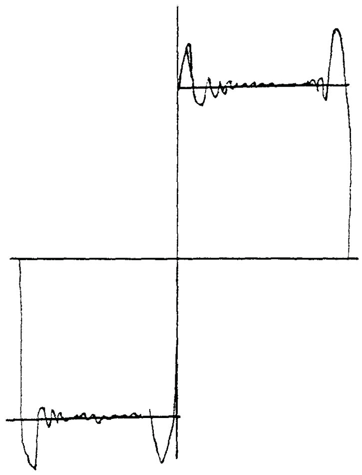
與 $y = 1$ 之誤差爲 10%。由原來的函數 f 而言很自然的猜測是當 $n \to \infty$ 其誤差等於 0, 但令人驚訝的是這猜測並不成立, 反倒是

$$\lim_{n\to\infty} \max S_{2n+1}(x) = 1.089490^{+}.$$

總是超過 (overshooting) 將近 9%, 這就是 Gibbs 現象, 一般而言 S_{2n+1} 的最大、最小值位於 S_{2n-1} 之最大、最小值之間。



圖五



圖六

我們將 S_{2n+1} 表爲積分形式

$$S_{2n+1}=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n}\int_0^x\cos(2k+1)\xi d\xi$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^x\Big[\sum_{k=0}^{n}e^{(2k+1)i\xi}+\sum_{k=0}^{n}e^{-(2k+1)i\xi}\Big]d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^x\Big[e^{i\xi}\frac{1-e^{2i(n+1)\xi}}{1-e^{2i\xi}}+e^{-i\xi}\frac{1-e^{-2i(n+1)\xi}}{1-e^{-2i\xi}}\Big]d\xi$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{2\cos(n+1)\xi\sin(n+1)\xi}{\sin\xi}d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^v\frac{\sin u}{u}du. \tag{2.17}$$

其中 $u=2(n+1)\xi$, $v=2(n+1)x$, 對最後這個積分而言其最大值發生在 $\sin v=\sin 2(n+1)x=0$, $x=\frac{\pi}{2(n+1)}$ 其値等於

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin u}{u}du=1.089490^+.$$

我們的確證明了 Gibbs 現象。若 $n<\infty$, 令 $x=0$ 則 $v=0$, $S_{2n+1}=0$, $\forall n$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to0}S_{2n+1}=0, \tag{2.18}$$

反之當 $x>0$, $n\to\infty$ 則 $v\to\infty$, 因爲 Dirichler 積分 $\int_0^\infty\frac{\sin u}{u}du=\frac{\pi}{2}$ 所以

$$\lim_{x\to0}\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=1. \tag{2.19}$$

兩個極限 (2.18), (2.19) 無法交換!

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to0}S_{2n+1}\neq\lim_{x\to0}\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}.$$

這也說明爲何 Fourier 級數之收斂性問題需要討論。

註解:

(1) 正弦積分 (sine integral)

$$\mathrm{Si}(x)\equiv\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt \tag{2.20}$$

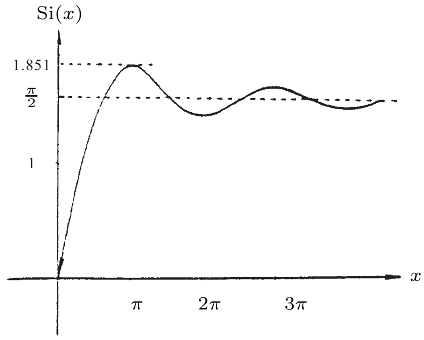
自然而然出現在研究 f 之 Fourier 級數。這個積分無法寫成基本函數 (elementary function) 但可由 $\sin t$ 之 Taylor 級數表示爲

$$\mathrm{Si}(x)=x-\frac{x^3}{3\cdot3!}+\frac{x^5}{5\cdot5!}-\cdots, \tag{2.21}$$

如果 $x\to\infty$ 就是 Dirichler 積分

$$\mathrm{Si}(\infty)=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}. \tag{2.22}$$

我們可以利用 Laplace 變換將之轉換成雙重積分或由複變函數的留數定理來計算這個積分值。正弦積分 Si(x) 之圖形在函數值等於 ± 1 附近快速振盪 (highly oscillationg) 這也是造成 Gibbs 現象的原因。



圖七

3. Dirichlet 核:

我們看 Fourier 級數的部分和 (有限項和):

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\Big)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)D_n(t)dt \quad (3.1)$$

其中

$$D_n(t) = \frac{1}{\pi}\Big(\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\cdots+\cos nt\Big) = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{1}{2}t} \quad (3.2)$$

就是第 n 階 Dirichler 核 (nth Dirichlet kernel), 習慣上也稱 (3.1) 爲 $s_n(x)$ 之 Dirichlet 公式或 Dirichlet 奇異積分 (Dirichlet singular integral), 同理

$$\tilde{s}_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx - b_k\sin kx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(\sum_{k=1}^{n}\sin k(x-t)\Big)dt$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\widetilde{D}_n(x-t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\widetilde{D}_n(t)dt \quad (3.3)$$

其中

$$\widetilde{D}_n(t) = \frac{1}{\pi}\Big(\sin t+\sin 2t+\cdots+\sin nt\Big) = \frac{\cos\frac{1}{2}t-\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{1}{2}t}, \quad (3.4)$$

稱爲第 n 階共軛 Dirichler 核 (nth conjugate Dirichlet kernel), 上面的推導過程除了說明 $D_n(t)$, $\widetilde{D}_n(t)$ 如何出現之外, 同時也告訴我們探討 *Fourier* 級數的收斂性問題等價於研究奇異積分的問題, 而且 Fourier 級數的和是以褶積 (convolution) 的形式表現的。我們可以說研究 Fourier 級數自然而然就引進了褶積這個概念。

3.1 定義: f、g 爲 $\mathbf{R}$ 上的兩個週期函數 (週期等於 2π) 則其褶積 $f*g$ 定義爲

$$f*g(x)\equiv\int_{a-\pi}^{a+\pi}f(x-\xi)g(\xi)d\xi, \tag{3.5}$$

其中 a 爲任意實數。

由函數的週期性可以證明褶積 $f*g$ 與 a 之選取無關, 利用變數變換與積分順序互換可容易得到褶積的基本代數運算

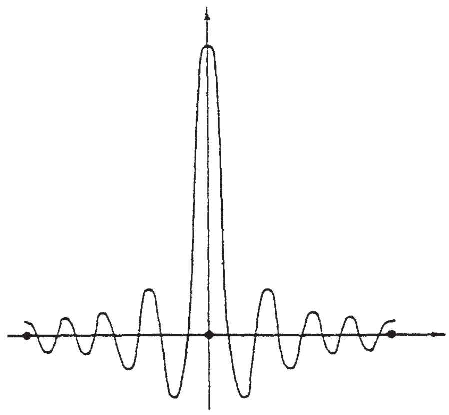
3.2 定理: f、g、h 爲 $\mathbf{R}$ 上的三個週期函數 (週期等於 2π) 則其褶積具有底下之關係:

$$\begin{aligned}&(\text{分配律})\ f*(ag+bh)=a(f*g)+b(f*h),\\&(\text{交換律})\ f*g=g*f,\\&(\text{結合律})\ f*(g*h)=(f*g)*h.\end{aligned}$$

分開逐項積分可容易證明 (這相當於令 $f=1$ 代入 (3.1))

$$\int_{-\pi}^{0}D_n(t)dt=\int_0^{\pi}D_n(t)dt=\frac{1}{2}. \tag{3.6}$$

D_n 之圖形可以這麼看: $\frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$ 是振幅 (amplitude), 因此 D_n 代表以 $\frac{1}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$ 爲振幅, 上下快速振盪的波, 除了在 $t=0$ 之外, 其他部分之積分彼此幾乎互相抵消, 這現象我們稱爲 oscillation-cancellation, 當 $n\to\infty$ 時 D_n 幾乎集中在 $t=0$, 這個現象與 Dirac δ-函數非常接近, 因此我們也稱 Dirichlet 核爲一近似單位元素 (approximate identity), 直觀而言可以期待



圖八

$$s_n(x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)D_n(t)dt\longrightarrow f(x),\qquad (n\to\infty). \tag{3.7}$$

這就是 Fourier 級數的收斂性問題。

我們可以將 $f(x+t)$ 分解成偶函數與奇函數兩部分

$$f(x+t)=\frac{1}{2}\Big(f(x+t)+f(x-t)\Big)+\frac{1}{2}\Big(f(x+t)-f(x-t)\Big)$$

因爲 $D_n(t)$ 是偶函數, 對 s_n 這個積分而言只有偶函數的部分才有貢獻, 因此可預測的是

3.3 逼近定理: 已知 f 爲一分段平滑的週期函數, 則

$$s_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\Big(f(x+t) + f(x-t)\Big) D_n(t)dt \to \frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big) \quad (n \to \infty) \tag{3.8}$$

如果 f 在 x 點是連續, 則 $s_n(x) \to \frac{1}{2}\Big(f(x+) + f(x-)\Big) = f(x)$。

這定理告訴我們 f 之 Fourier 級數逐點收斂 (pointwise convergence) 到 f (不連續的點則以左極限與右極限來定義)。但是這結果對更一般的函數 f 並不成立, 爲什麼呢? 我們需要引進稽積 (convolution) 的概念:

回到 (3.6), 這個收斂性問題可以表示爲

$$s_n(x) = f * D_n(x) \to f(x) \;\leftrightarrow\; D_n(x) \to \delta(x) \tag{3.9}$$

$\delta(x)$ 就是 Dirac δ-函數, Dirac 序列之定義爲

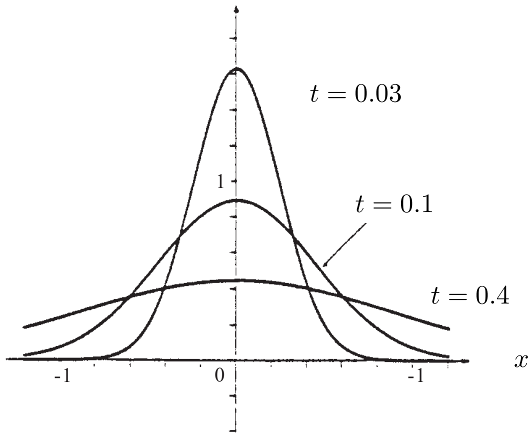
3.4 定義: 連續函數 $\{K_n\}_n$ 滿足底下三個條件則稱爲一 Dirac 序列:

(1) $K_n \geq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} K_n(x)dx = 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

(3) 給定 $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, 存在 n_0 使得 $n \geq n_0$ 則 $\int_{|x|\geq\delta} K_n(x)dx < \epsilon$。

直觀而言, Dirac 序列看起來就像 Gauss 常態分配。但很不幸的是 Dirichlet 核 D_n 並不具有這類似單位元素的性質, 讀者可直接由 D_n 之圖形觀察而得, 最主要的困難 $D_n(t)$ 差不多就是 $\sin nt$, 而這數列對任意 t 都不收斂, 爲著克服這困難, 匈牙利數學家 Féjer (1880-1959) 的取代方案是從算術平均著手。這想法其實很自然地, 例如數列 $\{x_n\}_n$ 收斂到 x, $x_n \to x$ 則其平均也收斂到 x, $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \to x$, 反之卻不見得成立;



圖九

$$x_n \to x \;\Rightarrow\; \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \to x \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \to x \;\not\Rightarrow\; x_n \to x$$

(逐點收斂若有困難, 我們就取平均試看看而平均就是弱收斂!)

4. Féjer 核:

Féjer 考慮 s_n 的算術平均

$$\begin{aligned}\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\Big(s_0(x)+s_1(x)+\cdots+s_{n-1}(x)\Big)\\ &= \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\Big(D_0(x-t)+D_1(x-t)+\cdots+D_{n-1}(x-t)\Big)dt\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)K_n(t)dt. \end{aligned}\tag{4.1}$$

這個積分稱爲 Féjer 奇異積分 (Féjer singular integral), 其中

$$K_n(t)=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}D_j(t)=\frac{1}{n}\Big(D_0(t)+D_1(t)+\cdots+D_{n-1}(t)\Big),\tag{4.2}$$

就是 Féjer 核 (Féjer kernel) 由 Dirichlet 核 D_n 之公式與 Euler 公式計算可得

$$\begin{aligned}2n\pi K_n(t) &= \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\sin(j+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{Im}\Big(\sum_{j=0}^{n-1}e^{i(j+\frac{1}{2})t}\Big)\\ &= \frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{Im}\Big(e^{it/2}\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}\Big) = \frac{1-\cos nt}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \Big(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\Big)^2,\end{aligned}\tag{4.3}$$

其中

$$K_n(t)=\frac{1}{2n\pi}\Big(\frac{\sin nt/2}{\sin t/2}\Big)^2.\tag{4.4}$$

對 Féjer 核 $K_n(t)$ 而言, 它的確是一個 Dirac 序列。

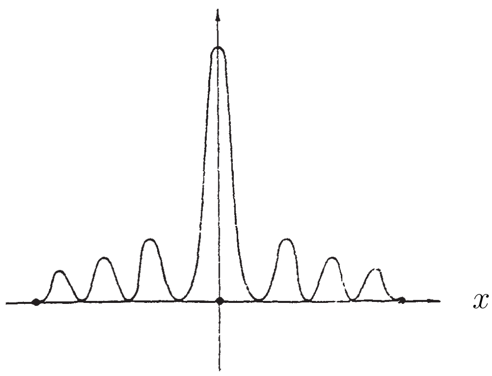
4.1 引理: $K_n(t)$ 具有底下之性質

(1) $K_n(t)$ 是一 2π, 週期函數

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)dt=1$,

(3) $K_n(t)\geq 0$,

(4) 給定 $\delta>0$, 則 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}K_n(t)dt=0$。



圖十

證明: 我們只需證明 (4), 由正弦函數之性質, 若 $\delta\leq|t|\leq\pi$, 則 $\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}\leq\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$, 故 $0\leq K_n(t)\leq\frac{1}{2n\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$, 因爲 $K_n\to 0$ (一致收斂), 故 $\int_{\delta\leq|t|\leq\pi}K_n(t)dt\to 0$。$K_n(t)$ 的控制函數 (dominated function) 可由正弦函數之性質而來:

$$\frac{1}{\sin^2 x}\geq\frac{1}{x^2}\qquad(\text{因爲 } |\sin x|\leq|x|)$$

$$\frac{1}{\sin^2 x}\geq 1$$

兩式相加

$$\frac{1}{\sin^2 x} \geq \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{x^2+1}{2x^2}$$

所以 $\sin^2 \frac{1}{2}nt \leq \frac{2n^2t^2}{n^2t^2+4}$ 另一方面當 $|t| \leq \pi/2$ 則 $|\sin t| \geq \frac{2}{\pi}|t|$ 所以 $\sin^2 \frac{t}{2} \geq \frac{t^2}{\pi^2}$ 因此

$$K_n(t) \leq \frac{n\pi}{n^2t^2+4} \tag{4.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n\pi}{n^2t^2+4}dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi d\xi}{\xi^2+4} = \frac{\pi^2}{2}$$

4.2 Féjer-Cesaro 逼近定理: 已知 f 爲一分段連續的週期函數, 則 $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \lim_{n\to\infty} K_n * f(x) = f$。

$S_n(x)$ 與 $\sigma_n(x)$ 之關係可以這麼看: 先將 $\sigma_n(x)$ 表示成 Fourier 級數

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4.6}$$

所以

$$S_n(x) - \sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4.7}$$

平方之後積分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [S_n(x) - \sigma_n(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2}(a_k^2 + b_k^2), \tag{4.8}$$

因此收斂的好壞就由 Fourier 係數 a_k, b_k 而定。

5. Poisson 核:

另一種討論 Fourier 級數收斂性問題的方法是由挪威數學 Abel (1802-1829) 所提, 給定可積分的週期函數 f, 將之表爲 Fourier 級數 (注意我們將 x 換爲 θ 以表示角度)

$$f(\theta) \sim S[f] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin \theta). \tag{5.1}$$

Fourier係數爲

$$\binom{a_n}{b_n} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\binom{\cos n\pi}{\sin n\pi}d\theta. \tag{5.2}$$

(5.1) 可視爲單位圓上的 Fourier 級數, 現在把半徑 r 也考慮進去

$$f(r,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^n \qquad 0 \leq r < 1. \tag{5.3}$$

這是 $S[f]$ 的 Abel 平均 (Abel mean), 將 (5.2) 代入 (5.3) $f(r,\theta)$ 可以表示爲

$$\begin{aligned} f(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)d\varphi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\Big(\cos n\varphi\cos n\theta + \sin n\varphi \sin n\theta\Big)d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\Big[1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n(\theta-\varphi)\Big]d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)P(r,\theta-\varphi)d\varphi, \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中

$$P(r,\theta) \equiv 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos n\theta = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}, \tag{5.5}$$

就是 Poisson 核 (Poisson Kernel), 而 $f(r,\theta)$ 則稱爲函數 f 的 Poisson 積分公式 (Poisson integral formula)。透過 Euler 公式可以將 $P(r,\theta)$ 寫得更精簡

$$P(r,\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\theta} \tag{5.6}$$

我們必須要求 $r<1$, 則 (5.6) 之右式才是兩個收斂的等比級數, 如此才能保證我們前面所做之計算, 例如積分與無窮級數之互換才是合法的, 以 $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f)$ 代表 f 之實部與虛部

$$\begin{aligned} P(r,\theta) &= \mathrm{Re}(1+2z+2z^2+2z^3+\cdots) = \mathrm{Re}\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big), \qquad z = r^{i\theta} \\ &= \frac{1}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1-r^2}{(1-re^{i\theta})(1-re^{-i\theta})} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$P(r,\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = \frac{1-r^2}{(1-r^2)+4r\sin^2\frac{\theta}{2}} \tag{5.8}$$

順便一提, 如果取虛部可得

$$\mathrm{Im}\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big) = 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\sin n\theta = \frac{2r\sin\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

Poisson核具有 Féjer 核所有之性質, 而且比 Féjer 核還要平滑 (smooth)。令

$$P_r(\theta) \equiv \frac{1}{2\pi}P(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} \tag{5.9}$$

顯然 $P_r(\theta)$ 是一周期函數 (周期等於 2π), $P_r(\theta) = P_r(-\theta)$ 更且 $P_r(\theta)$ 是一 Dirac 序列, 但其意義與 Féjer 核略有不同, 此時我們所取的足碼 (index) 是 r 不是 n, 而且考慮的是 $r\to 1$ 之行爲 (非 $n\to\infty$)

5.1 定理: $P_r(\theta)$ 是一 Dirac 序列

(1) $P_r(\theta) \geq 0,\ 0 \leq r < 1,$

(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) = 1,$

(3) 給定 $\epsilon,\ \delta > 0$, 存在 $r_0,\ 0 < r_0 < 1$, 使得 $\displaystyle\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\theta)d(\theta) + \int_{\delta}^{\pi} P_r(\theta)d(\theta) < \epsilon$。

(3) 告訴我們當 $r \to 1$ 時, $P_r(\theta)$ 之行爲就像 δ-函數。因爲 $0 \leq r < 1$, 由 (5.9) 不難看出來 $P_r(\theta) \geq 0$。其次

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta}d\theta = \begin{cases} 2\pi, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

利用 (5.6) 與逐項積分, 唯一有貢獻的是常數項 $(n = 0)$, 所以 $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta)d\theta = 1$ 最後我們證明 (3), 若 $|\theta| \geq \delta > 0$, 則 $\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2} \leq \frac{1}{1-2r\cos\delta+r^2}$ 利用微分可以證明分母 $1 - 2r\cos\delta + r^2$ (視爲 r 的函數) 之極小値等於 $1 - (\cos\theta)^2$ (產生在$r = \cos\delta$), 因此 $\frac{1}{1-2r\cos\theta+r^2}$ 是一致有界 (視爲 r 的函數), 故 $\lim_{r\to1^-} \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2} = 0$, 所以由一致收斂可結論 $\int_{\delta\leq|\theta|\leq\pi} P_r(\theta)d\theta < \epsilon$, 因爲 $P_r(\theta)$ 是一 Dirac 序列, 所以由 Dirac 序列之性質可得

5.2 Poisson 逼近定理: 已知 f 爲一分段連續的週期函數, 則 $\lim_{r\to1} P_r * f = f$

Poisson核最重要的應用是偏微分方程中的 Laplace 方程的 Dirichlet 問題

$$\begin{aligned} &(D.E.) \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad x^2 + y^2 \leq 1 \\ &(B.C.) \quad u(x, y) = f(x, y), \qquad x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

其中函數 f 是已知的邊界條件。這個偏微分方程的解正好就是 Poisson 積分公式 (5.3), 直觀上可以如此看: 滿足 $\Delta u = 0$ 的函數, 也稱爲調和函數 (harmonic function), 由於 $r^n \cos n\theta$, $r^n \sin n\theta$ 是調和函數 (正好是解析函數: $z^n = (x + iy)^n = r^n e^{in\theta}$ 之實部與虛部), 而且以 $\cos n\theta,\ \sin n\theta (r = 1)$ 爲其邊界值, 因爲 Laplace 方程是線性的 (linear), 所以由重疊原理可知 $f(r, \theta)$ 所代表的正是單位圓盤的調和函數, 而且其邊界值等於 $f(\theta)$ 這實在是令人驚訝的結果, 原先探索的是級數收斂的問題, 後來卻出人意料之外得到 Dirichlet 問題的精確解! 要證明 $P_r(\theta)$ 是一調和函數需花點力氣, 首先將 Laplace 算子 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, 利用連鎖律改寫成極座標之形式 $(x = r\cos\theta\,, y = r\sin\theta)$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{5.10}$$

逐項微分可證明 P_r 是一調和函數 $\Delta P_r(\theta) = 0$, 另外對於褶積 (convolution integral) $g * f(x)$, 函數 f, g 其中只要有一項是好函數 (例如 $g \in C^\infty$) 則 $g * f$ 就有那麼好 $(g * f \in C^\infty)$;

$D^m(g*f)=D^mg*f$

$$\frac{d^m}{dx^m}\int g(x-y)f(y)dy=\int\frac{d^m}{dx^m}g(x-y)f(y)dy. \tag{5.11}$$

回到 Poisson 積分

$$\Delta(P_r*f)=\Delta\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(r,\theta-\varphi)f(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Delta P(r,\theta-\varphi)f(\varphi)d\varphi=\Delta P_r*f=0, \tag{5.12}$$

所以 Poisson 積分 $P_r*f(\theta)$ 確實是一調和函數, 而且 Poisson 逼近定理告訴我們其邊界值正是 $f(\theta)$。

附錄:

令 $x=\frac{\pi}{2}$, 則函數 f (參考 (2.13)) 之 Fourier 級數就是著名的 Leibniz-Gregory 級數

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots \tag{A.1}$$

但是這個級數的收斂速率很慢, 我們可以藉由積分以增加其收斂速率。假設 $0<x<\pi$, 則 (A.1) 可以寫成 (因爲 $f(x)=1$)

$$\frac{\pi}{4}=\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots \tag{A.2}$$

從 0 到 x 積分

$$\frac{\pi}{4}x=(1-\cos x)+\frac{1}{3^2}(1-\cos 3x)+\frac{1}{5^2}(1-\cos 5x)+\cdots. \tag{A.3}$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$ 可得公式

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots \tag{A.4}$$

所以 ((A.4), (A.3) 兩式相減)

$$\frac{\pi}{4}(\frac{\pi}{2}-x)=\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots \tag{A.5}$$

再次積分

$$\frac{\pi}{8}(\pi x-x^2)=\sin x+\frac{1}{3^2}\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5x+\cdots \tag{A.6}$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$ 可得另一個類似的 Leibniz 級數

$$\frac{\pi^3}{32}=1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots \tag{A.7}$$

(A.6) 再積分一次,

$$\frac{\pi}{8}(\pi\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3})=1-\cos x+\frac{1}{3^4}(1-\cos 3x)+\frac{1}{5^4}(1-\cos 5x)+\cdots \tag{A.8}$$

令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得

$$\frac{\pi^4}{3\cdot 32}=1-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{7^4}+\cdots \tag{A.9}$$

所以

$$\frac{\pi}{8}(\frac{\pi^3}{12}-\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3})=\cos x+\frac{1}{3^4}\cos 3x+\frac{1}{5^4}\cos 5x+\cdots \tag{A.10}$$

利用上面的結果我們還可以得到更多的求和公式, 例如 (A.4) 加偶數部分

$$\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\Big(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\Big)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}\cdot\frac{4}{3}=\frac{\pi^2}{6} \tag{A.11}$$

(A.9) 加偶數部分

$$\frac{\pi^4}{3\cdot 32}+\frac{1}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\Longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{3\cdot 32}\cdot\frac{16}{15}=\frac{\pi^4}{90} \tag{A.12}$$

參考資料:

1. H. Dym and H. P. Mckean, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York, 1972。
2. Gerald B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth and Brooks/Cole Mathematics Series, Pacific Grove, California, 1992。
3. Gerald B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, Inc., 1999。
4. Serge Lang, *Math Talks for Undergraduates*, Springer, 1999。
5. Eli Maor, *e: The story of a number*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994, 中譯本: 毛起來說 e, 胡守仁譯, 天下文化出版, 2000。
6. Eli Maor, *Trigonometric Delights*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998, 中譯本: 毛起來說三角, 鄭惟厚譯, 天下文化出版, 2000。
7. Jerrold E. Marsden and Michael J. Hoffman, *Elementary Classical Analysis*, 2nd edition, W. H. Freeman and Company, New York, 1993。
8. R. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York, 1977。
9. 林琦焜, *Riemann-Lebesgue* 引理與弱收斂, 數學傳播季刊, Vol. 81, pp. 17–28, 1997。
10. 林琦焜, *Weierstrass* 逼近定理, 數學傳播季刊, Vol. 87, pp. 11–25, 1998。

—本文作者任教於成功大學數學系暨應用數學研究所—