從“賈憲三角”看數學史在數學教育中的作用和價值

傅海倫

數學史研究已具有很長的歷史, 如何在數學教育中運用數學史的知識, 充分發揮數學史的作用和價值則是當前數學教育改革面臨的一個重要課題。1998年4月20日至26日, 由國際數學教育委員會 (ICMI) 發起, 在法國馬賽附近的 Luminy 鎮舉行了題爲“數學史在數學教育中的作用” 國際研討會。張奠宙教授在「重視“科學史”在科學教育中的應用」一文中指出: 在數學教育中, 特別是中學的數學教學過程中, 運用數學史知識是進行素質教育的重要方面。目前數學史在數學教育中的應用已經進入系統地研究階段, 並在一些國家和地區進行實踐性的操作。中國的數學史研究, 乃至科學史研究, 已經擁有相當規模的隊伍。但是, 目前的研究似乎還沒有注意到如何運用於教學過程, 發揮它的應有效益, 本文以中國古算中的“賈憲三角”及其應用爲例, 說明將數學史知識切入中學數學教學的有效途徑和做法。

一、“賈憲三角”溯源

11世紀上半葉, 中國北宋數學家賈憲, 撰「黃帝九章算法細草」。他繼承了「九章算術」的開方傳統, 並吸收了「九章算術」以來的諸多改進和方法, 在「少廣」章中, 提出了著名的立成釋鎖法和賈憲三角即開方作法本源, 把開立方推廣到開三次以上的高次方和解三次以上的高次方程。

賈憲的立成釋鎖是依據載有計算常數的算表開方的方法。這裡, 算表 (“立成”) 便是“開方作法本源”, 即賈憲三角, 它實際上是將整指數二項式 $(a+b)^n$, $n=0,1,2,\ldots$ 的展開式的係數由上到下排成的三角數表。賈憲給出了增乘方求廉法的賈憲三角造法, 表現出他注重數學方法的內在聯繫和程序化思想的探求。

增乘方求廉法草曰 “釋鎖求廉本源”: 列所開方數“如前五乘方, 列五位, 隅算在外”以隅算一, 自下增入前位, 至首位而止“首位得六, 第二位得五, 第三位得四, 第四位得三, 下一位得二。”復以隅算如前升增, 遞低一位求之$\cdots$[1]

[1] 此爲法草合一, 草原來爲小字, 今置於括號中。

這是以求五乘方 (即六次方) 右廉爲例的一般化程序, 按此程序造表的要義有三: 一是定位, 擺成豎式, 不計隅算, 幾乘方則列幾位; 二是自下而上遞加; 三是每次低一位而止。比如本草五乘方造表如下, 可求得6、15、20、15、6位即賈憲三角第七行的各廉。所有這些, 我們完全可以稱其爲構造性的證明。

		第1位	第2位	第3位	第4位	第5位	
1	6	↓	↓	↓	↓		
1	5	15					
1	4	10	20				
1	3	6	10	15			
1	2	3	4	5	6		
1	1	1	1	1	1	...	

這種方法, 可以求得任意多層的賈憲三角, 因此, 賈憲三角的提出, 表明了賈憲已把傳統的開方法推廣到開任意高次方。不僅如此, 這種以賈憲三角爲立成的完整開方法向算法的機械化大大邁進了一步, 人們以算表開方, 即使不懂數學原理, 也可掌握其運算程序, 機械地得出結果。設對於數 A 開 n 次方, $x^n = A$, 若 x 爲兩位數, 設 $x = a + b$, (a 爲十位數, b 爲個位數), 則

$$\begin{aligned} A = x^n = (a+b)^n &= C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{n-2} b^2 + \cdots + C_{n-1}^n a b^{n-1} + C_n^n b^n \\ &= a^n + (C_1^n a^{n-1} + C_2^n a^{n-2} b + \cdots + C_n^n b^{n-1}) b \end{aligned}$$

故 $A - a^n - (C_1^n a^{n-1} + C_2^n a^{n-2} b + \cdots + C_n^n b^{n-1}) b = 0$。

在估算出 a 後作減法 $A - a^n$, 然後以 $C_1^n a^{n-1}$ 試除後得到 b。“立成釋鎖”即由開方作法本源圖所提供的諸 C_i^n $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ 來確定諸廉, 然後“以廉乘商方” (即 $C_i^n a^{n-i} b^i$), 再“命實以除之”(即 $A - a^n - \sum C_i^n a^{n-i} b^i$), 若 x 爲3位數或3位以上數, 則可依照固有程序再求出第二位數後繼續開方。

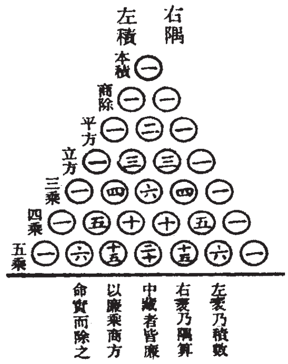
二、“賈憲三角”在中學數學教學中的切入

1、給中學數學教學一個確切的數學史實

賈憲的“開方作法本源”圖, 實際上就是中學數學教育中的指數爲正整數的二項式展開式的係數表, 是中學數學的重要內容, 因而歷來在中學數學的教學中占有重要地位。這個係數表的作出, 進一步從理論上證明了增乘開方法的正確性。然而, 中學數學教育中長期將“賈憲三角”稱爲“楊輝三角”, 許多中學數學教師在給學生介紹這部分史實時就是說這個三角是由楊輝給出的,

這是不妥的。由於賈憲的「黃帝九章算法細草」早已失傳, 恰恰是楊輝在自己的著作「詳解九章算法」中作了徵引, 所以後人常把開方作法本源圖, 稱作“楊輝三角”。

右圖是著名的“楊輝三角”目前所知的最早出處。表中“衺”字, 有“衺”即古“斜”字的誤文之說。但楊輝說這個圖“出「釋鎖」算書, 賈憲用此術”, 故應稱之爲“賈憲三角”。在西方, 法國數學家帕斯卡 (A. Pascal, 1623-1662) 1654年提出與此相同的三角, 但較賈憲晚將近500年。我國著名數學史家錢寶琮認爲, 賈憲提出開方作法本源圖和增乘開方法是數學史上無與倫比的偉大成就之一。



2、作為數學模型方法的“賈憲三角”教學

中學數學教學中的“賈憲三角”可作爲以下的數學模型:

$$
\begin{array}{c}
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_0^{n+1} \quad C_1^{n+1} \quad C_2^{n+2} \ \cdots\cdots \ C_n^{n+1} \quad C_{n+1}^{n+1}
\end{array}
$$

關於“賈憲三角”的構造性質已有多種研究和介紹, 在教學中應注意把握。比如

1. 對稱性。每行中與首末兩端等距離之數相等, 即 $C_r^n = C_{n-r}^n$。
2. 遞歸性。除1以外的數都等於肩上兩數之和, 即 $C_m^n + C_{m-1}^n = C_m^{n+1}$。
3. 第 n 行各數之和等於 2^n, 即 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$。
4. 自腰上的某個1開始平行於腰的一條線上的連續 n 個數的和等於最後一個數斜下方的那個數, 即 $C_0^n + C_1^{n+1} + C_2^{n+2} + \cdots + C_m^{n+m} = C_m^{n+m+1}$。
5. 第 n 行各數平方和等於第 $2n$ 行中間的數, 即 $(C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + \cdots + (C_n^n)^2 = C_n^{2n}$。

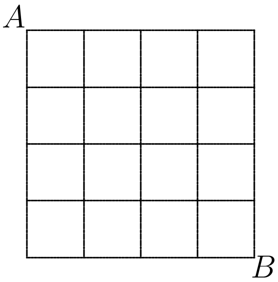
6. 第 n 行前 $k+1$ 個數和第 m 行後 $k+1$ 個數對應項積的和等於第 $n+m$ 行的第 $k+1$ 個數, 即: $C_0^nC_{m-k}^m+C_1^nC_{m-k+1}^m+\cdots+C_k^nC_m^m=C_k^{n+m}$。

3、"賈憲三角"的應用教學舉例

觀察賈憲三角, 各數字可連成方格網, 在此基礎上, 教師可引導學生作如下變換:

變換 (1): 若將賈憲三角繞頂點 (設爲 A 點) 按逆時針方向旋轉45度, 觀察新的方格網圖, 根據數字構成規律, 可以設計成下面城市街道縱橫圖的應用問題:

例1: 某一城市的街道縱橫如圖 (1), 分別以東西、南北各五條路, 組成方格網, 行人在街道上行走, (方向規定只能由西向東, 由北向南前行), 某同學欲從該城市的最西北角 A 處前往東南角 B 處, 試問其有多少種不同的走法? (1984年上海初中數學競賽題。)



圖(1)

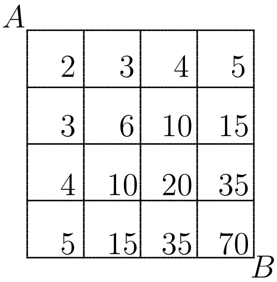


圖 (2)

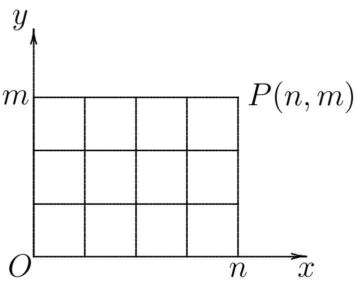


圖 (3)

教學展開:

1. 首先讓學生認眞審題、觀察、思考: 本題是求東西、南北各五條路的情況, 那麼, 任意 n 條路也應該會求, 因而思路是向外開放的。
2. 當學生難於獨立解決問題時, 教師作適當啓發: 解決該問題的方法應是向內收縮的。即從方格網最簡單的情況入手, 通過歸納、比較, 能發現什麼樣的規律?
3. 能否發現與"賈憲三角"的關係?

   通過學生認眞思考和親身操作實驗, 從中發現它實際上是賈憲三角的局部表示。其答案是70, 正好對應賈憲三角表中的 C_4^8, 圖 (2)。
4. 將題目作進一步開放成一般情形: 設東西、南北各有 n 條 和 m 條, 從城市的最西北角 A 處前往東南角 B 處, (只能由西向東, 由北向南前行), 問共有多少種不同的走法?

變換 (2): 將以上方格網放在平面直角坐標系中, 並將網數擴大到一般字母, 網上的每個格點對應著一個坐標, 這樣老師可提出如下解析幾何問題:

例2: 設 $P(n,m)$ 爲第一象限內的任意一個格點, 從原點 O 出發到 P 點的遞增線路有多少條? 如圖 (3), 答案是 C_m^{n+m} 或 C_n^{n+m}。

變換 (3): 若將“賈憲三角”補上第一行1, 並以此爲準向左看齊, 可得到下圖表:

$$
\begin{array}{llllllllllll}
F_n = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\quad\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144 \\
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\
1 & 8 & 28 & 56 & 70 & 56 & 28 & 8 & 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
C_0^{n+1} & C_1^{n+1} & C_2^{n+1} & \cdots\cdots\cdots & C_n^{n+1} & C_{n+1}^{n+1}
\end{array}
$$

在以上三角數表中, 賈憲三角的第 n 行由左邊的1爲起點畫一條線與水平方向成45 度的角, 這條線上所經過的數的和就是著名的斐波那契數列的第 n 項, 即 C_0^0 、C_0^1 、$C_0^2+C_1^1$ 、$C_0^3+C_1^2$ 、$C_0^4+C_1^3+C_2^2$ 、... 恰好是斐波那契數列的各項, 滿足 $F_0=F_1=1$, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geq 2)$。例如, 在圖中, 有 $F_8=1+7+15+10+1=34$, 這就是賈憲三角與菲波那契列的關係。於是老師可以給學生引出如下的“生兎子問題”:

例3: 一對小兎子 (雌雄各一), 過一個月就成長爲一對大兎子, 大兎子又過一個月就要生出一對雌雄各一的小兎子, 小兎子過一個月又長成一對大兎子, 大兎子每過一個月都要生出一對雌雄各一的小兎子, 若照此生下去, 且無死亡, 問一年後應有多少對兎子?

讓學生自己動手, 試寫出自第1月到第12月的情形, 可塡寫下表:

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
大兎子數目	0	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
小兎子數目	1	0	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
總數	1	1	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

學生自己發現的結果: 一年內233對兎子。這恐怕是學生所沒有想到的, 如果眞的是以這樣的速度繁殖的話, 世界將是不堪設想的! 從而使學生認識到保持生態平衡的重要性。對於有餘力的學生可以結合教材, 引導他們查閱有關的數學史料, 可進一步學習有關的菲波那契數列的性質及其廣泛應用, 以開闊學生的視野, 培養學生的數學學習興趣和鑽研能力。

結語: 以上我們通過選取中國古算中的"賈憲三角", 目的在於說明數學史對數學教育有何助益, 應該通過怎樣的途徑發揮數學史在數學教育特別是中學數學教育的作用, 提高數學課堂教學的質量。既然在當今的數學教育中究竟如何有效地運用數學史的知識還是一個新的重要課題, 1998年4月的馬賽會議, 已經介紹了各國許多有價值的例子。相比之下, 我們在這方面的研究幾乎還沒有進行。數學史的知識僅作爲"閱讀材料", 放在一邊, 並沒有和實際教學融爲一體。本文正是基於此, 提供一個歷史上眞實的"問題", 以拋磚引玉, 希望進一步推動這方面的工作。

参考文獻

1. 張奠宙, 重視"科學史"在科學教育中的應用, 載「數學思想的傳播與變革: 比較研究國際學術討論會」論文, 武漢, 1998年10月。
2. 楊輝,「詳解九章算法 (附纂類)」, 上海: 商務印書館, 1936。
3. 錢寶琮,「中國數學史」, 北京: 科學出版社, 1964。
4. 蔣文蔚,「數學發現與成就」, 桂林: 廣西師範大學出版社, 1996。
5. (美), 李學數,「數學和數學家的故事」(1), 北京: 新華出版社, 1999。
6. 劉鈍,「大哉言數」, 潘陽: 遼寧教育出版社, 1995。

—本文作者任教於山東師範大學數學系—