Golomb算法與埃及單位分數

文耀光

1. 引言

如何將眞分數分解成相異「單位分數」(即分子爲1的分數) 的問題, 作者曾於「古埃及的單位分數問題」一文中已有論述, 所介紹的方法包括有「埃及方法」(Egyptian Method)、「斐波那契法」(Fibonacci's Algorithm) 及「史都華法」(Stewart's Method; 又稱 Splitting Algorithm) 等, 都是很簡單和有效的方法。不過除了這些方法外, 由數學家 Golomb 於1962年提出的另一個方法 (簡稱 Golomb 算法), 亦很值得爲讀者介紹。其法僅利用了一些初等數論的結果, 便能夠把任意的眞分數展成單位分數之和, 是一個很不錯的方法。本文將會爲大家介紹 Golomb 算法的理論背景、證明和一些應用例子, 並比較 Golomb 算法與斐波那契法的優劣。

2. Golomb 算法

Golomb算法是建基於以下的定理:

定理1: 若 a, b, c 爲整數, 不定方程 $ax+by=c$ 有整數解的充要條件是 c 能被 $\gcd(a,b)$ 整除。

推論1: 若 a, b 爲互質正整數, 則存在整數 x, y 使得 $ax-by=1$。

Golomb算法: 設 a, b 爲互質正整數, 且 $a<b$ 。分數 a/b 可用以下的步驟分解成若干個相異單位分數之和:

(步驟一) 求滿足不定方程 $ax-by=1$ 的整數解 m, n, 而 m 爲可能解中的最小正整數。把 a/b 記作:

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{bm}+\frac{n}{m}$$

若 $n=1$, 則分解完成。不然, 要進行步驟二。

(步驟二) 仿照步驟一把 $\frac{n}{m}$ 分解成一個單位分數及另一個分數。重複此步驟, 直至所有的分數都化成單位分數爲止。

證明: 由於 $\gcd(a,b)=1$, 根據推論一可知存在整數 x, y 使得 $ax-by=1$。若只取正數的 x, 則根據最小自然數原理, 必定存在最小正整數 m 及其對應的整數 n 使得 $am-bn=1$。

因此 $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} = \frac{1}{bm} + \frac{n}{m}$。再由 $\gcd(a, b) = 1$ 及 $0 < a < b$, 易知 $n < m$, 且引用定理一可推出 $\gcd(m, n) = 1$。現在要進一步證明 $m < b$, 才可以肯定有限次執行步驟二之後, 能將原分數展成互異的單位分數之和。證明可以採用反證法進行如下:

情況一: 若 $m = b$, 那麼由 $am - bn = 1$ 及定理一推出 m 整除 1, 但 $m = b$ 及 $b > 1$, 故不可能。

情況二: 若 $m > b$, 那麼存在正整數 s 使得 $m = b + s$。但 $a(m - b) - b(n - a) = 1$, 故知 s 與 $n - a$ 是滿足方程 $ax - by = 1$ 的整數解, 且 s 比 m 更小, 因此 m 不可能是解中的最小正數, 故有矛盾。

由以上證明顯示, 經 Golomb 法所得的單位分數之分母, 會構成一嚴格單調下降的數列, 此點可在下述例子中更清楚看到。

例1: 把 3/7 分解成單位分數之和。

解:

$$\begin{aligned}\frac{3}{7} &= \frac{1+2\times 7}{7\times 5} = \frac{1}{35} + \frac{2}{5} \quad (\because 3\times 5 - 7\times 2 = 1)\\ &= \frac{1}{35} + \frac{1+5}{5\times 3} = \frac{1}{35} + \frac{1}{15} + \frac{1}{3} \quad (\because 2\times 3 - 5 = 1)\end{aligned}$$

例2: 把 5/121 分解成單位分數之和。

解:

$$\begin{aligned}\frac{5}{121} &= \frac{1+121\times 4}{121\times 97} = \frac{1}{11737} + \frac{4}{97} \quad (\because 5\times 97 - 121\times 4 = 1)\\ &= \frac{1}{11737} + \frac{1+97\times 3}{97\times 73} = \frac{1}{11737} + \frac{1}{7081} + \frac{3}{73} \quad (\because 4\times 73 - 97\times 3 = 1)\\ &= \frac{1}{11737} + \frac{1}{7083} + \frac{1+73\times 2}{73\times 49} = \frac{1}{11737} + \frac{1}{7081} + \frac{1}{3577} + \frac{2}{49} \quad (\because 3\times 49 - 73\times 2 = 1)\\ &= \frac{1}{11737} + \frac{1}{7083} + \frac{1+73\times 2}{73\times 49} = \frac{1}{11737} + \frac{1}{7081} + \frac{1}{3577} + \frac{1+49}{49\times 25} \quad (\because 2\times 25 - 49\times 1 = 1)\\ &= \frac{1}{11737} + \frac{1}{7081} + \frac{1}{3577} + \frac{1}{1225} + \frac{1}{25}\end{aligned}$$

如果使用斐波那契法, 以上兩題的答案將會是:

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{11} + \frac{1}{231}$$

及

$$\frac{5}{121} = \frac{1}{25} + \frac{1}{757} + \frac{1}{763309} + \frac{1}{873960180913} + \frac{1}{1527612795642093418846225},$$

明顯比 Golomb 法所得的分母較大。

3. 算法分析及比較

由上述證明可見, Golomb 算法的最大分母爲 bm, 而 $m < b$, 故知展開時的最大分母不會大於 $b(b-1)$。另外, 由於 $am - bn = 1$, $m < b$ 及 $a < b$, 可知 $n < a$。因此展開後的項數不會大於 a。根據 Bleicher 與 Erdös 的分析, 雖然斐波那契法的展開項數亦不會大於 a, 但所得的最大分母是以指數增長 (exponential growth) 的, 故其所求得之分母一般會比較大。

下表總結了一些測試結果[1], 希望可以深化讀者對這兩個算法的認識。

表一: Golomb算法的測試結果

例子	最大分母值	總項數
4/23	138	2
5/121	11737	5
17/101	606	2
19/123	1599	3
59/121	9680	21
20/46201	971232571	20
21/23	253	11

表二: Fibonacci法的測試結果

例子	最大分母值	總項數
4/23	138	2
5/121	$> 1.5 \times 10^{24}$	5
17/101	606	2
19/123	8323	3
59/121	20328	4
20/46201	$> 1.3 \times 10^{56}$	5
21/23	644046	5

4. 結語

對任意眞分數 a/b 而言, 由於引用 Golomb 算法展成單位分數之和後, 其最大分母不會大於 $b(b-1)$, 而涉及的項數亦不大於 a, 故一般比斐波那契法較佳。不過要徹底解決最優分解問題: 即要求所得的單位分數展開式, 其項數或最大分母比其他可能解爲小, 目前仍有待數學家進一步的努力。

参考文獻

1. Bleicher Beck & Crowe, Excursions into Mathematics, Massachusetts: A K Peters, 2000.
2. Bleicher & Erdos, Denominators of Egyptian Fractions, Journal of Number Theory, 8(1976), 157-168.
3. M. N. Bleicher, A New Algorithm for the Expansion of Egyptian Fractions, Journal of Number Theory, 4(1972), 342-382.
4. S. W. Golomb, An Algebraic Algorithm for the Represenation Problems of the Ahmes Papyrus, American Mathematics Monthly, 69(1962), 785-786.
5. 文耀光,「古埃及的單位分數問題」, 數學傳播, 26卷4期, 民91年12月。
6. 文耀光、吳銳堅、梁志強,「基礎數學引論」, 香港教育圖書公司, 2000。

—本文作者現任職於香港教育學院數學系 —

[1] 測試是採用了 Bleicher (1972) 論文中提及的例子, 不過其文章出現的錯誤已在表二中作出修訂。