代數數與無理數的探討

莊智仰

一、簡介:

高中數學中, 探討了一些數 (代數數) 是否爲無理數的問題。例如: $\sqrt{2}, 3+\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}$ 均是無理數, 而 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 也是無理數, 但證明上就不太容易了。大學三年級時, 修了許志農教授的 "數學解題", 其書上就有一題, 是要證明 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}$ 是無理數的問題, 也因此令我想去探討這類問題。

一些帶有根號的數值是否是無理數並不如想像中顯然, 例如: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 實際上就是1. (註: 是 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 是 $x^3+3x-4=0$ 的根式解形式)。同時也不難看出, $\sqrt{a+\sqrt{a^2-1}} \pm \sqrt{a-\sqrt{a^2-1}} = \sqrt{2a\pm 2}$, 當 $2a\pm 2$ 是完全平方數時, 該數即是有理數。這些形式的有理數, 多半是來自有有理根的多項式的根式解的形式。另外, 有時候我們想要找一個次數最低的有理係數 (整係數) 多項式 $f(x)$, 使 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3})=0$。這樣的 $f(x)$ 不難找, 是四次多項式 $x^4-10x^2+1=0$。如果換成要找有理係數多項式 $f(x)$, 使 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})=0$, 就不太容易了。更進一步的, 可以問說, 這樣的多項式, 至少要是幾次多項式? 本文主要的內容, 就是要針對這兩個問題一般的情形, 提出一個完整的答案。

二、內容:

我們先來看看如何找 $f(x)$, 使得 $f(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7})=0$。

結論一: 若 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 爲 n 個相異質數, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 均爲有理數, 其中 $k=2^n$。$\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = \{p_1^{h_1}p_2^{h_2}p_n^{h_n} | h_i = 0 \text{ 或 } 1,\ i=1,2,\ldots,n\}$, 則存在一個非零的有理係數多項式 $f(x)$, $\deg f(x) \le 2^n$ 使得 $f(a_1\sqrt{m_1}+a_2\sqrt{m_2}+\cdots+a_k\sqrt{m_k})=0$。

證明: 令 $y=a_1\sqrt{m_1}+a_2\sqrt{m_2}+\cdots+a_k\sqrt{m_k}$, 由於 y^r 均可寫成 $a_{r1}\sqrt{m_1}+a_{r2}\sqrt{m_2}+\cdots+a_{rk}\sqrt{m_k}$ 的形式, 其中 a_{ri} 均是有理數, $i=1,2,\ldots,k$。因此, 考慮下列 $k+1=2^n+1$ 個式子,

$$y^r = a_{r1}\sqrt{m_1}+a_{r2}\sqrt{m_2}+\cdots+a_{rk}\sqrt{m_k}, \qquad r=0,1,\ldots,k. \tag{1}$$

如果我們取 $k+1$ 個不全爲零的有理數 c_r, $r=0,1,\ldots,k$, 使得下列 k 個式子成立,

$$a_{0r}c_0+a_{1r}c_1+\cdots+a_{rk}c_k=0, \qquad r=1,\ldots,k. \tag{2}$$

則由 (1), (2) 可得到

$$c_k y^k + \cdots + c_2 y^2 + c_1 y + c_0 = 0$$

那麼令 $f(x) = c_k x^k + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ 即為所求。注意滿足 (2) 且不全為零的 c_r 是存在的。因為將 c_r, $r = 0, 1, 2, \ldots, k$ 看成 $k+1$ 個變數, 而 (2) 一共只有 k 個方程式, 因此必有非零解。而求解過程只是 a_{ij} (均是有理數) 進行加減乘 (除) 的運算, 所以, 自然可以找到非零的有理數解。至此, 我們得證這個結論。

推論一: 若 p_1, p_2,..., p_n 為 n 個相異質數, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 均為有理數, 其中 $k = d^n$。$\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = \{p_1^{h_1} p_2^{h_2} \ldots p_n^{h_n} |\ 0 \le h_i < d,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, 則存在一個非零的有理係數多項式 $f(x)$, $\deg f(x) \le d^n$, 使得 $f(a_1 \sqrt[d]{m}_1 + a_2 \sqrt[d]{m}_2 + \cdots + a_k \sqrt[d]{m}_k) = 0$。

結論一最主要是, 提供找多項式 $f(x)$, 使 $f(a_1\sqrt{m_1}+a_2\sqrt{m_2}+\cdots+a_k\sqrt{m_k}) = 0$ 的方法。事實上, 我們可以運用行列式, 列出一個公式。但是這樣並不足以說明 $a_1\sqrt{m_1}+a_2\sqrt{m_2}+\cdots+a_k\sqrt{m_k}$ 是無理數 (因為 $a_1\sqrt{m_1}+a_2\sqrt{m_2}+\cdots+a_k\sqrt{m_k}$ 也許是 $f(x)$ 的有理根)。不過, 運用結論一的結果, 我們先證明以下的結論, 再用它導出 $a_1\sqrt{m_1}+a_2\sqrt{m_2}+\cdots+a_k\sqrt{m_k}$ 是無理數。

結論二: 令 y 是由 $\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_n}$ 和有理數進行加減乘除所得, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 為 n 個相異質數, 則 y 可表為 $a_1\sqrt{m_1}+a_2\sqrt{m_2}+\cdots+a_k\sqrt{m_k}$, 其中 $k = 2^n$。而 $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = \{p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_n^{h_n} | h_i = 0$ 或 1, $i = 1, 2 \ldots n\}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 均為有理數。

證明: 顯然, 我們可以令 $y = \frac{b}{c}$, 其中 b, c 分別為

$$b_1\sqrt{m_1} + b_2\sqrt{m_2} + \cdots + b_k\sqrt{m_k},\ c_1\sqrt{m_1} + c_2\sqrt{m_2} + \cdots + c_k\sqrt{m_k}.$$

由結論一, 我們可以找到一個多項式 $f(x)$ 使得 $f(c) = 0$。我們可以令 $f(x) = x^s h(x)$, 其中 $h(x)$ 的常數項係數不為零的多項式, 如此可知 $h(c) = 0$。令 $h(x) = xg(x) - r$, g(x) 是多項式, 0是有理數, 則

$$y = \frac{b}{c} = \frac{bg(c)}{cg(c)} = \frac{bg(c)}{r}.$$

由此式易見, y 可化成 $a_1\sqrt{m_1} + a_2\sqrt{m_2} + \cdots + a_k\sqrt{m_k}$ 的形式。得證。

推論二: 令 y 是由 $\sqrt[d]{p}_1$, $\sqrt[d]{p}_2$, ..., $\sqrt[d]{p}_n$ 和有理數進行加減乘除所得, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 為異質數, 則 y 可表為 $a_1\sqrt[d]{m}_1+a_2\sqrt[d]{m}_2+\cdots+a_k\sqrt[d]{m}_k$, 其中 $k = d^n$。而 $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = \{p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_n^{h_n} | 0 \le h_i < d,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, a_k 為有理數。

結論二最重要的是, 提供將一個根式分母有理化的方法。

結論三: 若 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 爲 n 個相異質數, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 均爲有理數, 而且至少有兩項不爲零, $k = 2^n$。$\{m_1, m_2, \ldots, m_k\} = \{p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_n^{h_n} | h_i = 0$ 或1, $i = 1, 2, \ldots, n\}$, 則 (I) $x = a_1\sqrt{m_1} + a_2\sqrt{m_2} + \cdots + a_k\sqrt{m_k}$ 爲無理數, 且 (II) x^2 亦是無理數。

證明: 我們對 n 做歸納法證明。

一. $n = 1$ 時, 命題顯然成立。

二. 令 $n = j$ 時成立, 則當 $n = j+1$ 時, $x = a_1\sqrt{m_1} + a_2\sqrt{m_2} + \cdots + a_k\sqrt{m_k}$, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 中至少有兩項不爲零。其中 $k = 2^{j+1}$。

(a) 我們先證明 x 是無理數。令 $s = 2^j$,

$$\{g_1, g_2, \ldots, g_s\} = \{p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_j^{h_j} | h_i = 0 \text{ 或 } 1,\ i = 1, 2, \ldots, j\},$$

則

$$x = c_1\sqrt{g_1} + c_2\sqrt{g_2} + \cdots + c_s\sqrt{g_s} + \sqrt{p_{j+1}}(d_1\sqrt{g_1} + d_2\sqrt{g_2} + \cdots + d_2\sqrt{g_s}) \quad (1)$$

其中 $c_1, c_2, \ldots, c_s$, $d_1, \ldots, d_s$ 是適當有理數, 如果 $d_1 = \cdots = d_s = 0$, 由歸納假設即可知 x 是無理數。所以我們不妨假設 $d_1, \ldots, d_s$ 不全爲零, 此時由歸納假設容易推論得 $d_1\sqrt{g_1} + d_2\sqrt{g_2} + \cdots + d_s\sqrt{g_s} \neq 0$。此時, 如果 x 是有理數, 那將 (1) 經過移項, 可知 $\sqrt{p_{j+1}}$ 能經由 $\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \ldots, \sqrt{p_j}$ 和有理數進行加減乘除所得, 由結論二, 可知 $\sqrt{p_{j+1}}$ 可表爲 $b_1\sqrt{g_1} + b_2\sqrt{g_2} + \cdots + b_s\sqrt{g_s}$。如此, $(b_1\sqrt{g_1} + b_2\sqrt{g_2} + \cdots + b_s\sqrt{g_s})^2 = p_{j+1}$, 由歸納假設得知, $b_1, b_2, \ldots, b_s$ 中至多只有一項 b_i 不爲零, 於是有 $(b_i\sqrt{g_i})^2 = p_{j+1}$, 將此式展開後, 化成標準分解式, 比較 p_{j+1} 的指數, 會得到矛盾。因此 x 是無理數。

(b) 接下來證明 x^2 是無理數。接續 (a) 的討論, 爲符號簡單起見, 我們令 $v = c_1\sqrt{g_1} + c_2\sqrt{g_2} + \cdots + c_s\sqrt{g_s}$, $w = d_1\sqrt{g_1} + d_2\sqrt{g_2} + \cdots + d_s\sqrt{g_s}$ 。於是,

$$\begin{aligned} x^2 &= (v^2 + p_{j+1}w^2) + \sqrt{p_{j+1}}(2vw) \\ &= \alpha_1\sqrt{g_1} + \alpha_2\sqrt{g_2} + \cdots + \alpha_s\sqrt{g_s} + \sqrt{p_{j+1}}(\beta_1\sqrt{g_1} + \beta_2\sqrt{g_2} + \cdots + \beta_s\sqrt{g_s}) \quad (2) \end{aligned}$$

其中, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ 是適當有理數, 而

$$\begin{aligned} v^2 + p_{j+1}w^2 &= \alpha_1\sqrt{g_1} + \alpha_2\sqrt{g_2} + \cdots + \alpha_s\sqrt{g_s}, \\ 2vw &= \beta_1\sqrt{g_1} + \beta_2\sqrt{g_2} + \cdots + \beta_s\sqrt{g_s}. \end{aligned}$$

如果 x^2 是有理數, 由 (2), 運用 (a) 的討論, 可知, $2vw = 0$ 且 $v^2 + p_{j+1}w^2$ 是有理數, 故 $v = 0$ 或 $w = 0$, 因此我們分別可以得到 w^2 或 v^2 是有理數。再由歸納假設得知, $v = 0$, $w = d_i\sqrt{m_i}$ 或 $w = 0$, $v = c_i\sqrt{m_i}$, 不論何者都會使 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 中只有一項不爲零。與假設矛盾。故 x^2 爲無理數。

三. 由 一、二 及數學歸納法, 得證。

接下來我們對結論一所找到的多項式 $f(x)$, 做一些較深入的討論。我們先來定義所謂的最小多項式。

定義: 若 a 是一個給定複數, $f(x)$ 是個 m 次有理係數非零多項式, 滿足 $f(a)=0$, 且若有另一有理係多項式 $g(x)$ 滿足 $g(a)=0$, 則 $\deg g(x)\geq m$。則稱 $f(x)$ 是 a 的最小多項式。(換句話說, $f(x)$ 是滿足 $f(a)=0$ 的最低次有理係數多項式。) (註: 不難發現, 上述中 $g(x)$ 必是 $f(x)$ 的倍式, 否則 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的非零餘式 $h(x)$ 也滿足 $h(a)=0$ 且 $\deg h(x)<\deg f(x)$, 與 $f(x)$ 的定義矛盾。)

先前在結論一中找到的 2^n 次多項式, 是否能再讓次數更少一些呢? 在以下的結論中, 我們給出這問題的答案。首先, 我們先看一個引理。

引理一: 令 $y=a_1\sqrt{p_1}+a_2\sqrt{p_2}+\cdots+a_n\sqrt{p_n}$, $f(x)$ 爲一有理係數多項式且滿足 $f(a_1\sqrt{p_1}+a_2\sqrt{p_2}+\cdots+a_n\sqrt{p_n})=0$, 則

$$f(a_1\sqrt{p_1}+a_2\sqrt{p_2}+\cdots+a_{n-1}\sqrt{p_{n-1}}-a_n\sqrt{p_n})=0$$

證明: 令 $z=a_1\sqrt{p_1}+a_2\sqrt{p_2}+\cdots+a_{n-1}\sqrt{p_{n-1}}$, 如此 $y=z+a_n\sqrt{p_n}$。考慮此引理中的有理係數多項式 $f(x)$, 我們有 $0=f(y)=f(z+a_n\sqrt{p_n})$, 把 $f(z+a_n\sqrt{p_n})$ 中的 z 看成變數, 展開並整理後可發現,

$$f(z+a_n\sqrt{p_n})=h(z)+g(z)\sqrt{p_n}=0 \tag{3}$$

其中 $h(z)$ 和 $g(z)$ 均是 z 的有理係數多項式。觀察 (4), 由結論三的證明中, 我們知道,

$$h(z)=g(z)=0 \tag{4}$$

另外, 同理容易驗證

$$f(a_1\sqrt{p_1}+a_2\sqrt{p_2}+\cdots+a_{n-1}\sqrt{p_{n-1}}-a_n\sqrt{p_n})=f(z-a_n\sqrt{p_n})=h(z)-g(z)\sqrt{p_n} \tag{5}$$

由 (4) 和 (5), 我們即可得到 $f(a_1\sqrt{p_1}+a_2\sqrt{p_2}+\cdots+a_{n-1}\sqrt{p_{n-1}}-a_n\sqrt{p_n})=0$。得證。

結論四: 令 $y=a_1\sqrt{p_1}+a_2\sqrt{p_2}+\cdots+a_n\sqrt{p_n}$, 其中 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 均是不爲零的有理數, 則 y 的最小多項式 $f(x)$ 恰爲 2^n 次多項式。

證明: 令 $S=\{b_1\sqrt{p_1}+b_2\sqrt{p_2}+\cdots b_n\sqrt{p_n}|b_i=a_i$ 或 $-a_i,\ i=1,2,\ldots,n\}$。重複使用引理一, 逐步遞推, 不難發現 S 中的元素均是 $f(x)=0$ 的根。再由推論三的 (I), 我們知

道 S 中有 2^n 個元素 (也就是說, 不同 b_i 的選取產生不同的數)。因此, $f(x)$ 至少是 2^n 次多項式。而由結論一, 我們又知道 $\deg f(x) \le 2^n$, 因此 $f(x)$ 恰爲 2^n 次多項式。

註: 不難看出, 在結論四的假設下, 用結論一的方法, 所找到的多項式 $f(x)$, 恰是 2^n 次有理係數多項式。也正好就是 y 的最小多項式。而且, 這個多項式 $f(x)$ 所有的根恰好是下列 2^n 個數,

$$b_1\sqrt{p_1}+b_2\sqrt{p_2}+\cdots b_n\sqrt{p_n},\ b_i=a_i \text{ 或 } -a_i,\ i=1,2,\ldots,n.$$

利用這些根, 將 $f(x)$ 所有的一次因式相乘起來, 也是找 y 的最小多項式的一個好方法。

三、總結:

利用體擴張 (field extension) 理論, 當 d 是質數時, 用結論三, 引理一和結論四的技巧, 可以證明和結論四雷同的結果: 若 $p_1,p_2,\ldots,p_n$ 爲 n 個相異質數, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 均是不爲零的有理數, 則 $a_1\sqrt[d]{p_1}+a_2\sqrt[d]{p_2}+\cdots+a_n\sqrt[d]{p_n}$ 的最小多項式爲 d^n 次多項式。但當 d 不是質數時, 就不容易討論了。

另外, 對於 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 之類的數是有理數與否, 以及它們和多項式根式解之間的關係也很值得有興趣的人更深入的探討。

參考文獻

1. 數論導引, 華羅庚 編著。
2. 算術, 許志農 編著。
3. 整數論問題, 林聰源 譯。
4. Topic in algebra, I. N. Herstein.

—本文作者任教於台南一中—