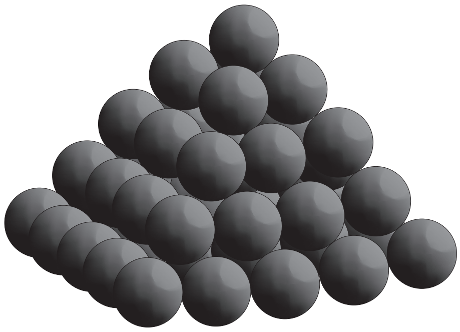
從 Lucas 的一則方程說起

吳振奎

Lucas 的一則方程式

1875 年英國數學家魯卡斯 (E. Lucas) 向「新數學年鑑」的讀者發出挑戰, 徵求下面命題的證明:

用砲彈堆砌成的正方棱錐 (每層砲彈數分別爲 $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$), 只有當最底層砲彈爲 24^2 顆時, 整個堆垛所堆砲彈數才是一個完全平方數。



這實際上相當要於證明方程

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+x^2=y^2, \quad (x,y\in Z)$$

只有 $x=24$, $y=70$ 的一組非平凡解。

次年, 布藍斯 (M. Moret−Blanc) 給出一證明, 但不久人們發現了他的缺陷, 爾後魯卡斯本人也給出一個小有紕漏的證明。第一個嚴格證明出自英國數學家沃特森 (G. N. Watson) 之手, 時在 1918 年, 爲此他甚至動用了橢圓函數工具。1985 年 De Gang Ma 首先給出問題的一個完全初等的證法。五年後, 安吉林 (W. S. Anglin) 又給出一個更簡的初等證明 [1]。

尋找幾何解釋

人們對於 Lucas 方程興趣始終未減的原因, 在於問題本身貌似不難 (注意到 $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, 顯然人們試圖尋找它是完全平方數的條件), 加之問題看上去有趣。

這兒順便先講幾句關於公式 (自然數前 n 項平方和):

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{1}$$

的背景, 據史料記載, 人們很早就知道公式 (自然數前 n 項和):

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1), \tag{2}$$

且於公元前 200 多年, 古希臘的阿基米德、畢達哥拉斯及其學派學子尼科馬修斯 (Nicomachus) 等就已經知道上面自然數平方和公式及立方和公式:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2. \tag{3}$$

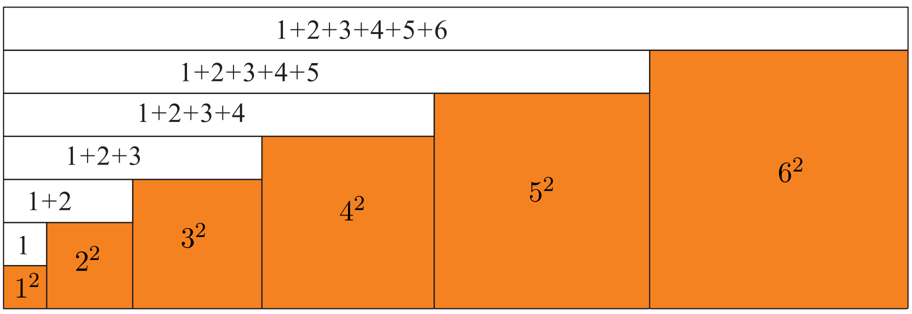
至於自然數四次方和公式, 直到 11 世紀才由阿拉伯數學家給出。更高次方冪和是由荷蘭數學家雅谷·伯努利 (J. Bernoulli) 在其所著「猜度術」一書中給出的, 且爲此引進了 Bernoulli 數。

對於公式 (1)、(3), 我們可通過計算下面圖表裡 "凵" 形中諸數和與整個數表中全部數和之關係, 能比較方便地推導出它們:

1	1	2	3	4	$\dots$	n
$1+2^2$	1	2	3	4	$\dots$	n
$(1+2)+3^2$	1	2	3	4	$\dots$	n
$(1+2+3)+4^2$	1	2	3	4	$\dots$	n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$(1+2+\cdots+n-1)+n^2$	1	2	3	4	$\dots$	n

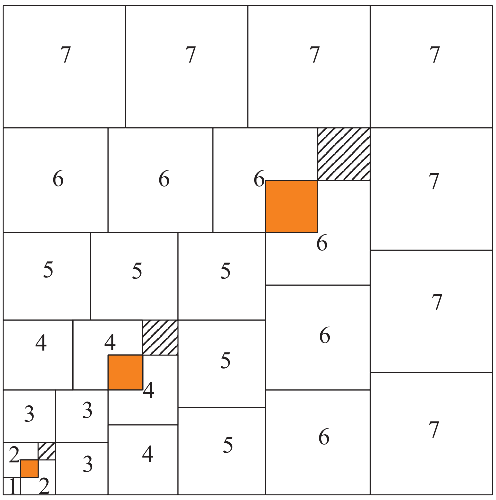
1^3	1	2	3	4	$\dots$	n
2^3	2	4	6	8	$\dots$	$2n$
3^3	3	6	9	12	$\dots$	$3n$
4^3	4	8	12	16	$\dots$	$4n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n^3	n	$2n$	$3n$	$4n$	$\dots$	n^2

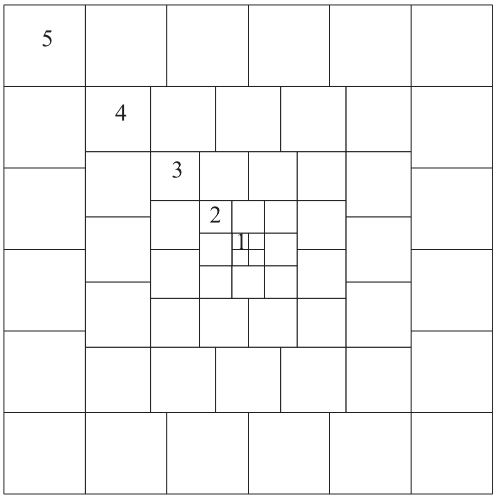
當然還可以通過下圖導出公式 (1), 只須按不同方式計算大矩形面積然後列出等式即可:



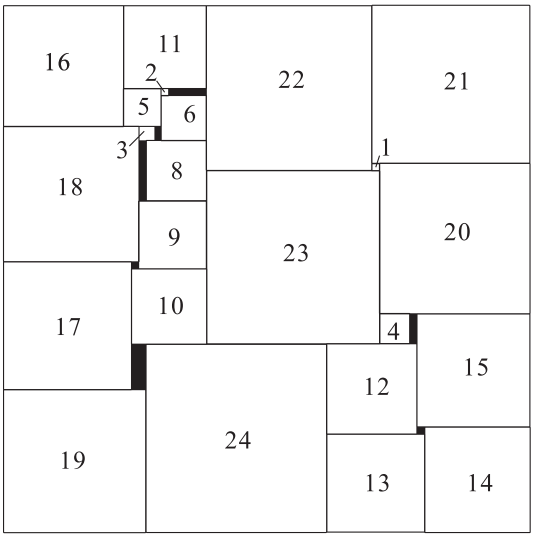
據稱, 此方法係 11 世紀波斯數學家阿爾·海賽姆 (al-Haitham) 給出。用他的方法還可類比地得到自然數 3 次、4 次、$\cdots$、m 次方冪和。

仿上方法通過下面兩圖中大正方形面積計算 (圖中數字表示該正方形邊長), 亦可導出公式 (3), 注意下左圖中陰影圖形面積與折線圖形面積抵消:





回到我們的問題, 試想等式 $1^2+2^2+3^2+\ldots+24^2=70^2$ 的意思顯然又是在說: “邊長分別爲 1, 2, 3,. . ., 24 的正方形面積和恰好等於一個邊長爲 70 的大正方形面積”。反過來是講: 可以用邊長分別是 1, 2, 3,. . ., 24 的小正方形完全覆蓋 (不重疊且無縫隙) 一個邊長爲 70 的大正方形。然而這種想法並不現實, 因而爲此所做的努力是徒勞的, 人們已證明它不可能。



時至今日, 人們找到的最佳覆蓋 (所剩面積最少) 如左圖。圖中數字表示該正方形邊長, 顯然它存在一些縫隙 (圖中黑色處), 且用了 24 個小正方形中的 23 個 (邊長爲 7 者未用上, 因而縫隙總面積爲 49)。細細想來, 這種幾何解釋中蘊含兩類問題: 一是圖形包容問題, 一是完美正方形問題。

所謂圖形包容是指一些圖形 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 可以無重疊放置在圖形 B 上, 稱 B 包容 $A_1, A_2, \ldots, A_n$。

人們曾經探索: 能包容邊長爲 $1\sim n$ 的全部整數邊長的正方形的最小正方形邊長是多少？若用 a 表示最小正方形邊長, 用 r 表示剩餘 (覆蓋剩餘):

$$r=a^2-(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2),$$

時至目前人們已經知道下表所給出的部分結果:

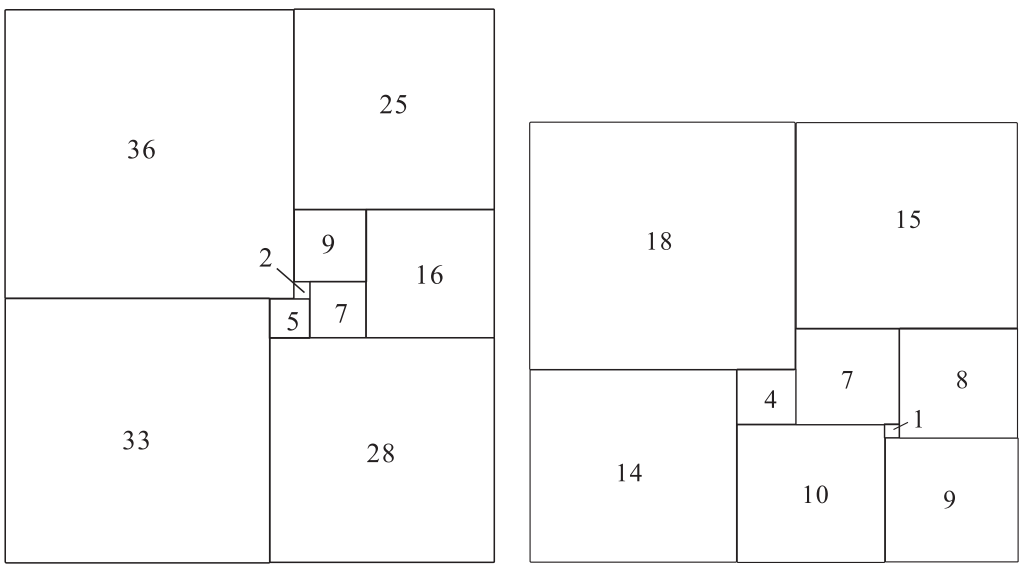
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
a	1	3	5	7	9	11	13	15	18	21	24	27	30	33	36	39	43	46	...
r	0	4	11	19	26	30	29	21	39	56	70	79	81	74	56	25	64	7	...

在前述問題中, 能包容 $1 \sim 24$ 邊長正方形的最小正方形邊長將大於 70。

接下來我們簡單介紹一下與之相關的另一個問題— 完美正方形問題。

完美正方形[4]

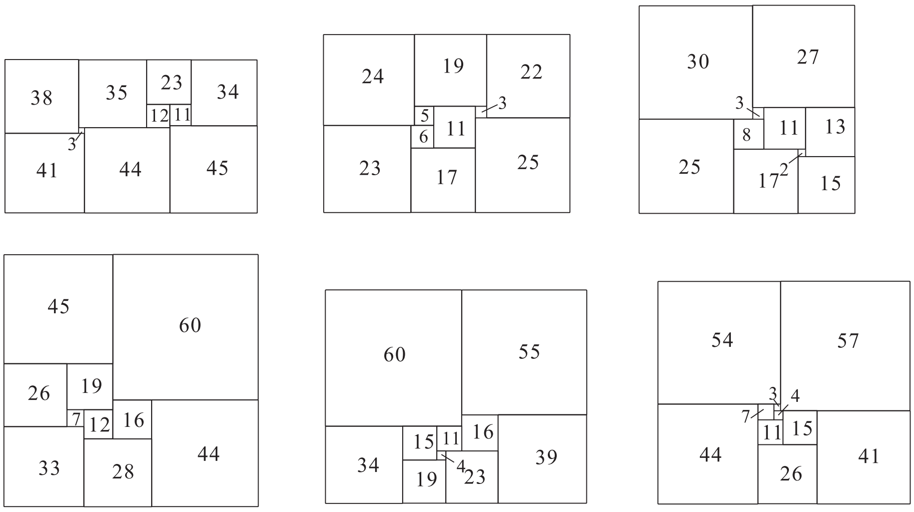
把一個整數邊長的正方形剖分成若干規格 (大小) 不同的整數邊長的小正方形問題稱爲完美正方形剖分問題, 能被剖分的正方形稱爲完美正方形。問題據稱始於 Lwów 大學的 S. Ruziewcz 教授。1925 年, Z. Moron 找到了一種將矩形剖分成規格不同小正方形的例子, 人們稱之爲完美矩形。被剖分成的小正方形塊數稱爲階。人們還發現階數最小的完美矩形爲 9 階, 且僅存在兩種 (見下圖, 圖中數字表示該正方形邊長)。



兩種 9 階完美矩形

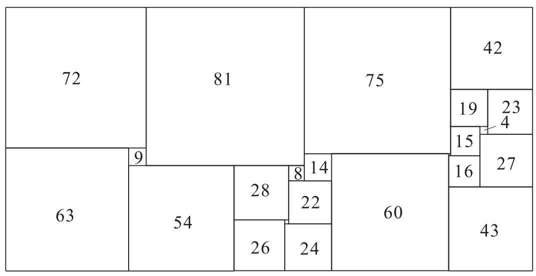
1960 年 Bouwkamp 等人給出 9∼15 階全部完美矩形 (借助於電子計算機)。

10 階完美矩形本質上講僅有以下 6 種:



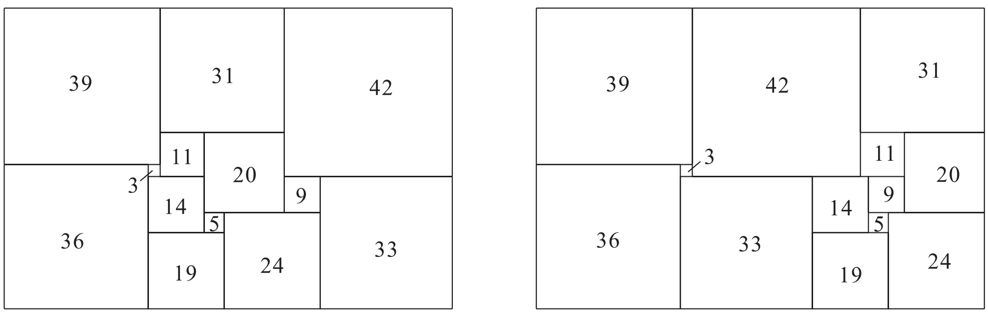
六種 10 階完美矩形

對於某些特殊的完美矩形, 人們對其興趣不減。比如 1968 年 R. L. Brooks 給出一個長寬之比爲 1:2 的完美矩形, 它的階數是 1323。次年, P. J. Federico 憑藉所謂經驗法構造一個階數僅爲 23 的長寬之比爲 1:2 的完美矩形 (見右圖)。



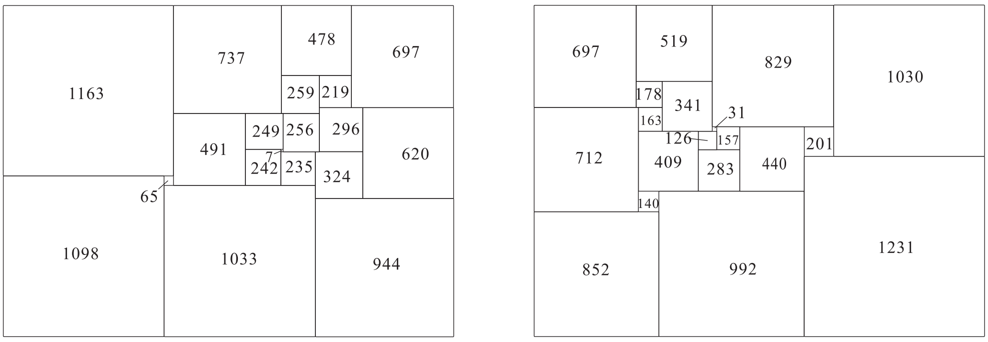
23 階 1:2 的完美矩形

下面是兩個由相同尺寸的 13 塊小正方形拼成的完美矩形 (112×75), 但它們的拼法卻截然不同, 這種例子在完美矩形中並不多見。對絕大多數完美矩形而言, 都不存在一種以上的拼法 (特別是小正方塊尺寸都相同)。



由 13 塊相同的小正方形拼成的兩種不同的 13 階完美矩形

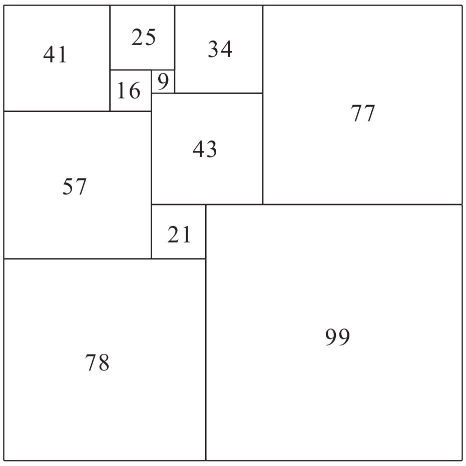
在完美矩形中, 同一規格的矩形, 完全不同的剖分雖然存在 (詳見後文), 但亦不多見。



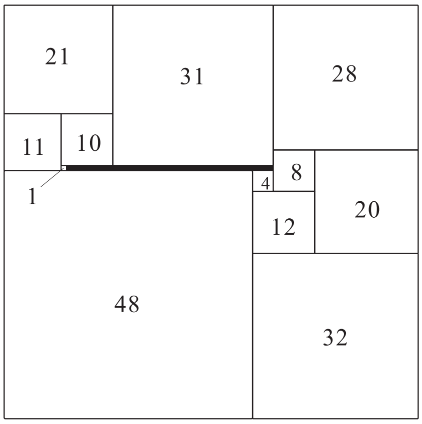
2261×3075 矩形的幾乎全然不同的完美剖分

完美矩形被發現後, 人們在尋找完美正方形經過努力未果時, 曾懷疑這種正方形的存在 (比如前蘇聯的 N. N. Lusin 等)。

這時卻有一些 "擬" 或 "准" 完美正方形相繼被發現 (但它們畢竟不是眞正意義下的完美正方形), 比如下左圖是一個 11 階完美矩形, 它的兩邊長分別是 177 和 176 (僅差一點點); 下右圖是 80×80 的正方形被剖分成 12 個大小不同的小正方形, 遺憾的是中間有一小條未被剖分 (圖中塗黑部份, 又是僅差一點點):



177×176 的完美矩形



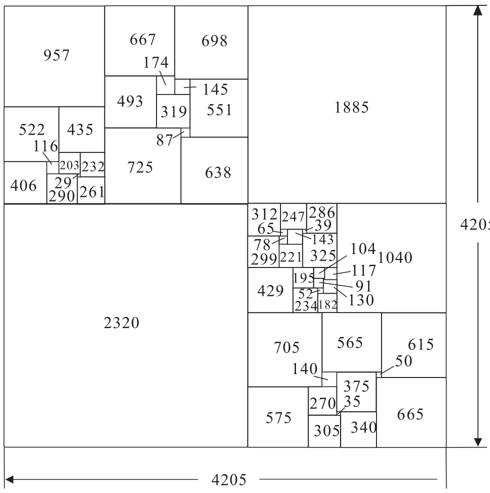
僅差一小條的擬完美正方形

(前面 Lucas 方程幾何解釋圖從某種意義上講也可視爲 "擬完美")

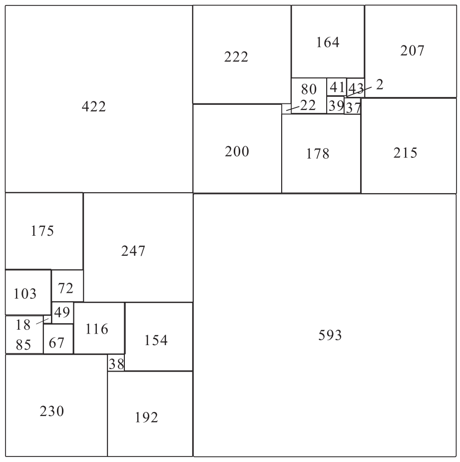
此後, 對於完美正方形的尋找人們仍未放棄, Moron 曾擬出一個由兩塊完美矩形拼接成一個完美正方形的方案。1939 年, R. Sprague 按照 Moron 的想法構造出世界上第一塊完美正方形, 它有 55 階, 邊長爲 4205。幾個月後, 劍橋大學三一學院的 Brooks 等人構造出階數更

小 (28 階), 邊長更短 (邊長爲 1015) 的完美正方形。

這個階數最小的記錄一直保持近十年 (至 1948 年才被打破)。

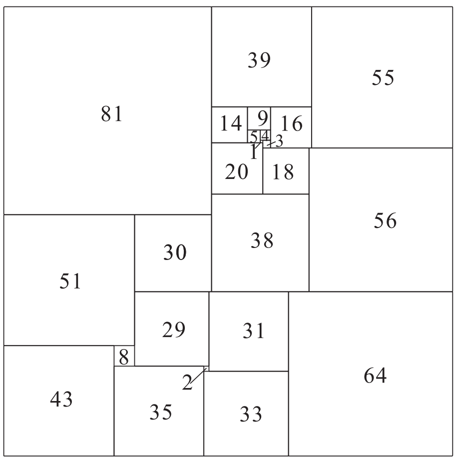


55 階的完美正方形

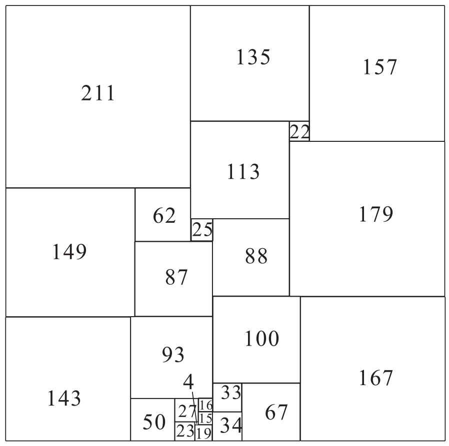


28 階完美正方形

接下來, 人們又陸續構造出其他一些階數更小的完美正方形。



24 階完美正方形



25 階完美正方形

順便一提: 對於完美正方形來講, 若它內部不包含完美矩形, 則稱它爲 “純完美正方形”; 否則稱之爲 “混完美正方形”。如上述 55 階、28 階、24 階完美正方形都是 “混完美正方形”, 而所給 25 階完美正方形係 “純完美正方形”, (其中前兩者中各含有一對尺寸相同但不同剖分的完美矩形) 起初人們用完美矩形去構造完美正方形, 那時所給出的完美正方形皆爲混完美型。由於要拼裝, 故混完美圖形相對階數要略高些。混完美正方形最小階數爲 24; 而純完美正方形

最小階數爲 21, 請見下文。

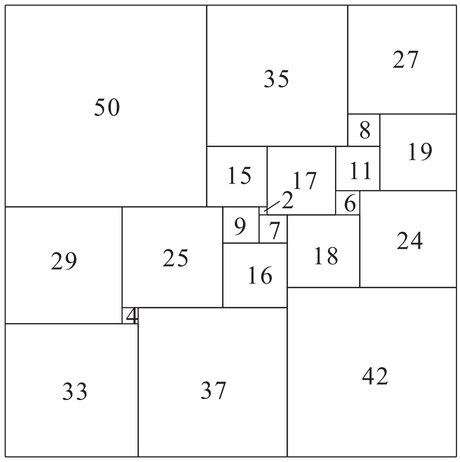
時至 1978 年, 人們已發現 2000 餘個完美正方形, 但其中最小階數爲 24。

早在 1962 年荷蘭溫切斯特大學的 Duijvestijn 已證明 (借助於電子電路理論)[6]:

不存在 20 及 20 以下階數的完美正方形。

16年後他構造出了世界上唯一的一塊最低階數 (21 階) 的完美正方形 (純完美正方形, 見右圖)。

1982 年他還證明了混完美正方形的最小階數是 24。至此完美正方形問題研究劃上了一個完滿的句號。



21 階完美正方形

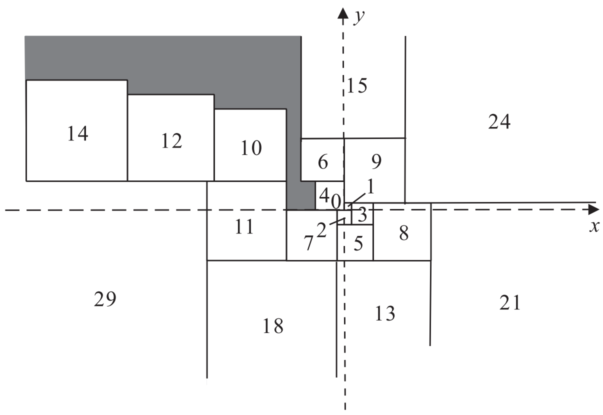
用小正方形去覆蓋整個平面

解決完完美正方形問題後, 有人又提出下面問題:

用邊長分別爲 1, 2, 3,... 的小正方形, 能否覆蓋住整個平面?

這是一個至今尚未獲釋的問題。[3] 但是人們借助於斐波那契 (Fibonacci) 數列 (滿足 $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, n \geq 1$ 的數列 $\{f_n\}$) 的性質證明了:

用邊長分別爲 1, 2, 3,... 的正方形, 至少可覆蓋整個平面的四分之三。



從上圖可看出: 在以虛線爲軸的座標系中, 將整個平面分成了四部份。用 Fibouacci 數列中的數 (1), 2, 3, 5, 8,... (這裡括號中的數字爲暫未用上者, 下同) 爲邊的正方形可覆蓋座標平面第四象限; 用廣義 Fibonacci 數列 (Lucas 數列): (6), 9, 15, 24,... 爲邊的正方形可覆蓋座標平面第一象限; 用廣義 Fibonacci 數列中: 7, 11, 18, 29, ... 爲邊的正方形可覆蓋座標平面的第三象限; 在 1, 2, 3, 4,... 中剩下的數 4, 6, 10, 12, 14,... 爲邊的正方形堆放在第二象限。

從圖可以看出: 整個平面被邊長爲 1, 2, 3,... 的正方形至少蓋住了四分之三。當然, 這裡還需考慮上述三個數列不交問題, 這應該沒有問題。

若記 $\{f_n\}_{n=0,1,2,3,\ldots}$ 爲 1, 1, 2, 3, 5,... 即 Fibonacci 數列; 又記 $\{L_n\}_{n=0,1,2,3,\ldots}$ 爲 Lucas 數列 $L_0 = r, L_1 = s$, 且 $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ $(n \geq 1)$, 則容易證明該數列通項與 Fibonacci 數列通項間關係:

$$L_{n+1} = rf_{n-1} + sf_n \quad (n \geq 1).$$

則對於數列: 6, 9, 15, 24,... 而言, 其通項:

$$L'_{n+1} = 6f_{n-1} + 9f_n. \tag{$*$}$$

又對於數列: 7, 11, 18, 29,... 而言, 其通項:

$$L''_{n+1} = 7f_{n-1} + 11f_n. \tag{$**$}$$

可以證明:

$$f_{n+4} < L'_n < L''_n < f_{n+5}. \tag{$***$}$$

這只須注意到:

$$f_{n+4} = f_{n+3} + f_{n+2} = 2f_{n+2} + f_{n+1} = \ldots = 8f_n + 5f_{n-1},$$

且 $f_{n+5} = f_{n+4} + f_{n+3} = 2f_{n+3} + f_{n+2} = \ldots = 13f_n + 8f_{n-1}$ 即可。

由 $(*)$ 及 $(**)$ 式, 知 $(***)$ 式成立。此即說前述三數列中無相同項, 即三數列的交集是空集。

這一點我們還可以通過比內 (J. P. M. Binet) 公式闡述。我們知道: Fibonacci 數列的通項可用公式

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

表示。對於 Lucas 數列: $L_0 = r$, $L_1 = s$, $L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ $(n \geq 1)$ 其通項爲

$$L_n = c_1\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + c_2\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big), \quad (n \geq 0)$$

其中 c_1, c_2 滿足方程組:

$$\begin{cases} c_1+c_2=r, \\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}c_1+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}c_2=s. \end{cases}$$

由於 c_1, c_2 不同, 數列通項表達式相異, 換言之它們將表示不同的數 (或數列不交)。

Lucas 問題的拓廣

人們在研究 Lucas 方程

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+x^2=y^2$$

時還發現: 對於其拓廣問題 (平方和不是從 1 開始):

$$\sum_{i=1}^{x}(k+i)^2=y^2,$$

有許多解, 比如下表所給數據 (k, x, y):

k	17	24	37	455	853	...
x	10	25	10	10	10	...
y	77	195	143	1529	2849	...

給出了方程的五組解。

此外人們也發現了不連續整平方和爲完全平方數的例子, 如

$$2^2+5^2+8^2+11^2+14^2+17^2+20^2+23^2+26^2=48^2$$

等等。其指數上的另外拓廣有解如:

$$\begin{aligned} &3^3+4^3+5^3=6^3, \\ &30^4+120^4+272^4+315^4=353^4, \\ &27^5+85^5+110^5+135^5=144^5 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

當然, 對於一般問題即方程

$$\sum_{k=1}^{x}k^n=g^n \qquad (n\geq 3) \tag{$*$}$$

解的研究仍未果, 人們在弱化某些條件後僅取得一些局部進展, 如: 1953 年 Leo Moser 證明了方程

$$\sum_{k=1}^{x-1} k^n = x^n$$

在 $x < 10^{10^6}$ 內無解。顯然它不是 Lucas 方程的直接推廣。此結論亦不合方程 $(*)$。

參考文獻

1. W. S. Anglin, The square pyramid puzzle, Amer. Math. Monthly, **97**(1990).
2. 吳振奎、俞曉群, 今日數學中的趣味問題, 天津科學技術出版社, 1990。
3. 吳振奎, 斐波那契數列, 遼寧教育出版社, 1989 (臺灣九章出版社, 1993)。
4. 吳振奎, 完美正方形, 自然雜誌, 1992(10)。
5. 曹富珍, 數論中的問題與成果, 哈爾濱工業出版社, 1996。
6. 吳振奎, 數學解題中的物理方法, 河南科技出版社, 1998。

—本文作者任教於中國天津商學院—