數學中的巧合、聯繫與統一

吳振奎

數學是上帝用來書寫宇宙的文字。— 伽利略

“數學裡有沒有巧合?” 這是戴維斯 (P. J. Davis) 教授在文 [1] 中提出的, 文章中以許多生動的例子闡述了數學中存在著巧合。他認爲數學中的共同特徵即是人們從許多不同的角度觀察到的形式上的一種巧合, 即 “數學的共同特徵中至少一個變種, 是可與巧合等同起來。”

巧合到底是什麼? 文中沒有確切地定義, 然而更重要的是文章似意猶未盡 — 我們還想指出: 僅有巧合是不夠的。

巧合只是一種現象

數學中有無巧合? 有。然而巧合只是一種現象, 一種尚未被人們認識的潛在規律。數學中的有些巧合是人們偶然發現的, 而有些巧合卻是 “人造” 的。但是無論如何, 規律總是潛在的、內蘊的。文 [1] 中列舉了下面三個例子:

(1) Euler 常數 e 和圓周率 π 的第 13、17、18、21 及 34 位上數字相同:

位數	1	2	3	4	5	$\cdots$	13	$\cdots$	17	18	$\cdots$	21	$\cdots$	34	$\cdots$
π	3	1	4	1	5	$\cdots$	9	$\cdots$	2	3	$\cdots$	6	$\cdots$	2	$\cdots$
e	2	7	1	8	2	$\cdots$	9	$\cdots$	2	3	$\cdots$	6	$\cdots$	2	$\cdots$

爲此有人猜測: e 和 π 的十進位小數數字, 平均每隔十位會出現一次重合。然而這一點既未被人們證實, 也未有人給出反例。

(2) $x=\sqrt{1+1141y^2}$, 當 $1\le y\le 10^{25}$ 時, x 都不是整數, 僅當

$$y = 30693\ 385\ 322\ 765\ 657\ 197\ 397\ 208$$

時才是使得 x 爲整數的第一個 y 值。(之前縱然你驗算過 $1\sim 10^{25}$ 的 y 值, x 都不是整數, 你依然無法斷定有無使 x 爲整數的 y 值存在)

(3) $e^{\sqrt{163}\pi} = 262\ 53741\ 26407\ 68743.00000000000\ldots$ 它幾乎與式右小數點前的整數

相差無幾 (相差不到 10^{-11}), 然而你仍然能斷定它不是整數 (由 Gelfond-Schkeider 定理知該數是一個超越數)。

我們當然想再聲明一點: 巧合 (不管是偶然發現還是人爲製造) 只是一種現象, 但它常會給人們帶來驚奇與不解, 而數學正是在人們追求新奇 (數學美之一[5]) 中發現了許多新東西, 新結論, 新課題:

莫塞爾 (L. Moser) 從 $1+2=3$ (簡單又巧妙) 的事實, 提出方程

$$\sum_{x=1}^{m-1} x^n = m^n$$

僅有顯明解 (trivial solution 或平凡解) $1+2=3$, 且驗證了當 $m<10^{10^6}$ 時爲眞 (R. Bowen 認爲該方程無非顯明解)。

費馬 (P. de Fermat) 從 $3^2+4^2=5^2$ (又是連續自然數關係) 萌生靈感提出方程 (1637 年):

$$x^n+y^n=z^n \qquad (n\ge 3)$$

無非顯明解。此猜想在這 358年之後才被證實。

另外他注意到 26 是夾在 $25(=5^2)$ 和 $27(=3^3)$ 之間的整數, 也是唯一一個夾在兩個方冪間的 (三個連續的) 自然數。(用稍稍專業的語言描述即: 橢圓方程 $x^3-y^2=2$ 僅有唯一一組整數解)。

歐拉 (L. Euler) 從等式 $3^3+4^3+5^3=6^3$ (也是連續自然數間關係) 提出

$$\sum_{k=1}^{n-1} x_k^n = x_n^n \qquad (n\ge 3)$$

沒有 (非顯明) 整數解, 儘管他錯了。

顯然, 由巧合導致的課題還有很多, 然而這些僅是人們發掘數學潛在規律的敲門磚。

聯繫是內在的

巧合是現象, 聯繫則是實質, 雖然有時人們尚未認淸它。上面列舉的文 [1] 中的巧合例子, 這兒稍稍揭示其中的些微 “秘密” (原因或道理) :

歐拉曾以 $e^{-i\pi}+1=0$ 將數學中幾個重要的常數 0、1、e、π、i 巧妙地聯在了一起, 那麼 e 與 π 間數字關係似乎可從該式中解讀出來, 只是目前尚未找到 “破譯” 它的 “密鑰”。

而 $x=\sqrt{1+1141y^2}$ 當 $1\le y\le 10^{25}$ 均非整數的原因係: 佩爾 (Pell) 方程 $x^2-Dy^2=1$, 若 $\sqrt{D}$ 的連分數展開式有一個長週期, 則它的第一個解特別大。

關於 $e^{\sqrt{163}\pi}$ 幾近整數的事實, 我們可以從解析數論和代數數論中尋求答案。

不太嚴格地講: 幾乎所有數學公式皆爲某一數學概念與另一數學概念間聯繫的反映。這兒列舉幾個與 π 有關的式子:

(1) 計算階乘的斯特林 (Stirling) 公式:

$$n! \approx \sqrt{2n\pi}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n\Big(1+\frac{1}{12n}\Big).$$

(2) 整數分拆數 (不計順序、允許重複地拆成正整數和形式的拆法方式數), 哈代 (G. H. Hardy) 和拉馬努揚 (S. A. Ramanujan) 建立了公式:

$$\varphi(n) \approx \frac{1}{4\sqrt{3}n}e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

(3) n 階法萊 (Farey) 分數個數

$$\Phi(n) \approx \frac{3n^2}{\pi^2} - 1.$$

(4) (1736年) 歐拉推導出關係式:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \cdots$$

且由此還得一些其他數學式。

當然我們還知道: 任給兩個自然數它們互質的機率爲 $\frac{6}{\pi^2}$ (恰爲 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ 的倒數)。

還可以再舉其他的例子, 但這些已告訴我們上述結論與 π (包括 e) 的聯繫。當然也有另外例子, 它們中的聯繫不是明顯的, 或則乍看上去根本風馬牛不相及。請看:

1. Fermat 質數與正多邊形尺規作圖

1640年前後費馬發現: $F_n = 2^{2^n} + 1$ 當 $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 時, F_n 分別爲 $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$, 它們均爲質數 (人稱費馬質數), 於是認定: n 爲任自然數時, F_n 皆爲質數。

結論顯然不眞 (1732年歐拉發現 $F_5 = 641 \times 670\ 0417$ 不再是質數, 且至今僅找到這五個費馬型質數)。但是德國數學家高斯 (C. F. Gauss) 卻發現:

正 n 邊形可尺規作圖若且唯若 $n \geq 3$, 且 n 的最大奇因子是不同的費馬質數之積。

2. Shmith 數與 Williams 質數

若正整數 n 可分解爲質因數 $p_1, p_2, \ldots, p_k$ 之積, n 的數字和等於其質因數的數字和, 人稱 n 爲 Shmith 數 (如 4、22、27、..., 在 $0 \sim 10^5$ 間有 3300 個此類數。又 Shmith 數有無窮多個)。

如果記 $I_n = \underbrace{111\cdots11}_{n\text{個}}$ (n 個 1 組成的 n 位數), 則形如 I_n 的質數稱爲 Williams 質數 (亦稱 Repunit 質數, 它最早由 Repunit 所研究。注意, n 是合數時 I_n 亦爲合數)。

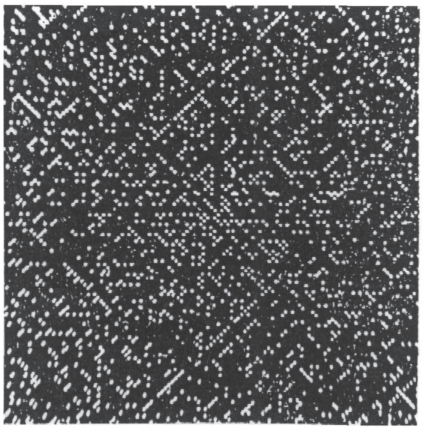
1983 年 S. Oltikar 和 K. Wayland 發現: 若 I_p 是質數, 則 $3304 \cdot I_p$ 是 Shmith 數。

3. Ulam 現象

烏蘭 (S. M. Ulam) 在一次不感興趣的科學報告會場, 無意中將 $1 \sim 100$ 的自然數依反時針螺旋方向 (自裡向外) 一一寫出, 當他把其中的質數全都圈出後竟爲其中的現象驚呆了: 這些質數全部分佈在某些直線上 (見右圖)。

一散會, 烏蘭立刻回到辦公室編出一個計算機程序完成 $1 \sim 65000$ 的數自然排佈 (依上做法) 及質數的挑選工作, 同樣的現象出現了 (見下圖)。

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82



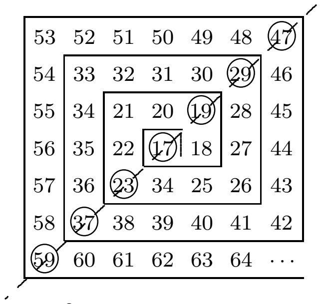
(圖中白點爲質數位置)

當人們爲此驚訝之際, 我們想指出, 這個問題與歐拉提出的:

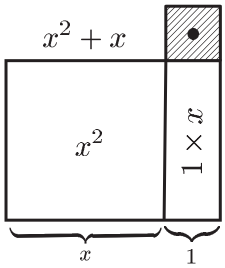
$$x^2 + x + 17 \text{ 當 } x = 0, 1, 2, \ldots, 16 \text{ 時},$$

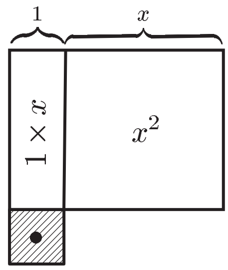
表達式都是質數的事實有著千絲萬縷的聯繫, 當我們把 17, 18, 19,... 仿照烏蘭的辦法依次按逆時針方向排成螺旋狀時, $x^2 + x + 17$ 所表示的質數皆分佈在一條直線上 (見下頁左圖)。其

實, 它的道理不難解釋如: x^2+x 恰好等於一個邊長爲 x 的正方形加上一個 $1\times x$ 的矩形, 那麼它的左下角、右上角處的數字 (圖中陰影處) 恰好爲下一個質數的位置 (它至多只能轉 8 圈):



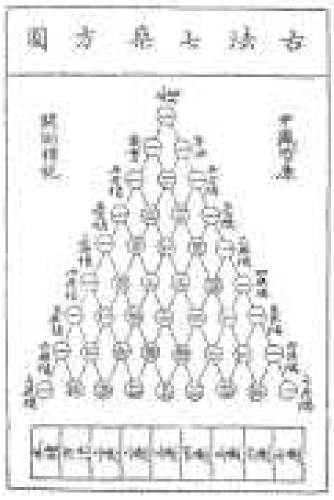
x^2+x+17 表示的質數





4. 楊輝三角、Fibonacci 級數、黃金數

楊輝三角國外亦稱爲 Pascal 三角, 它是二項式 $(a+b)^n$ 展開的係數:

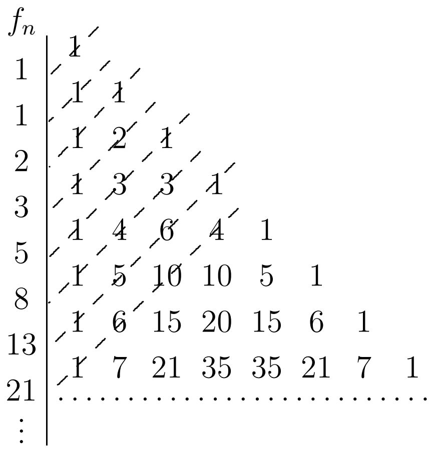


《四元玉鑒》中的 "古法七乘方圖"

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1
1　7　21　35　35　21　7　1
⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯

楊輝 – Pascal 三角

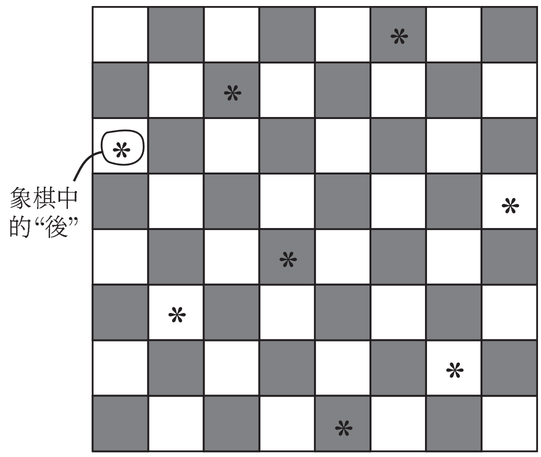
如將它改寫成右面形式, 再依圖中斜線方式求和後記在豎直線左側 (見圖), 它們恰好依次爲 Fibonacci 數列諸項: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... 這一點是可以嚴格證明的。另外我們也知道: 該數列相鄰前後兩項比的極限恰好爲黃金 (分割) 數 0.618...:



$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n+1}}=0.618\ldots。$$

5. 雙平方和與棋盤 8 後問題

1850年前後高斯 (C. F. Gauss) 提出: 8×8 的棋盤上能否放置 8 個 "後" 而使之彼此不被吃掉。高斯給出其中 76 種解, 其實它有 92 種解。此後, 諾克 (Noker) 等人提出: $n\times n$ 的棋盤能否放置 n 個後而使之彼此不被吃掉 (n 後問題)?



8 後問題的一種解

1969 年霍夫曼 (J. E. Hofman) 等證明: $n\geq 4$ 時 n 後問題總有解。具體的解的情況見下表:

n	4	5	6	7	8	9	10	...
解的個數	2	10	4	40	92	352	724	...

之前 (1640 年) 費馬在給梅森 (M. Mesenne) 的信中提到: $4k+1$ 型質數皆可表爲兩個完全平方數和的形式 (雙平方和定理)。該命題在 1754年由歐拉證得。

20 世紀初, 波利亞 (G. Pólya) 認爲: 雙平方和定理與 n 後問題有關聯。

1977年拉森 (L. C. Larson) 果然用 " n 後問題" 解法給出 "雙平方和定理" 的一個漂亮證明。

據載德國數學家閔可夫斯基 (H. Minkowski) 也曾做過類似的工作。

6. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 與 $\ln n$

衆所周知: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 發散, 然而 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ 增長的很慢, $n=10^3$ 時它的值僅爲 $7.485470\ldots$ 因而計算它十分困難。

然而歐拉卻發現:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=0.5772156\ldots\qquad \text{(Euler 常數)}$$

如此一來, 當 n 較大時人們可以用 $\ln n$ 的值去近似 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ (如果把 $\int$ 視爲 $\sum$ 即求和號的引申, 則 $\ln n=\int_1^n\frac{1}{x}dx$ 恰好 "相當" 於 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$), 顯然方便多了。

7. 省刻度尺與完美標號

18 世紀英國遊戲家杜登尼 (H. E. Dudeney) 曾發現:

一根 13 cm 長的量尺只須在 1、4、5、11 cm 處刻上四種刻度, 便可完成 $1\sim 13$ 間任何整數 cm 長物品的度量 (下稱完全度量), 人稱 "省刻度尺"。

(嚴格地講 0 與 13 亦爲量尺刻度, 只是省略罷了)

杜登尼還指出: 22 cm 的尺子只須刻上六個刻度即可完成 $0\sim 22$ cm 的完整度量, 且刻度方式有兩種:

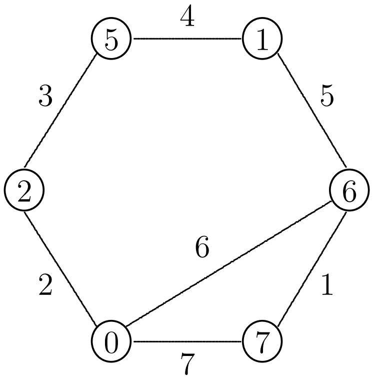
(1) 刻度在 1、2、3、8、13、18 cm 處;

(2) 刻度在 1、4、5、12、14、20 cm 處。

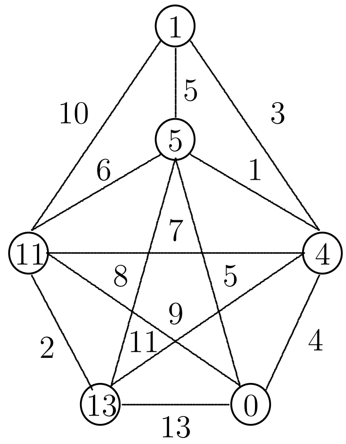
其實六個刻度的量尺度量範圍可擴至 23 cm (日本人滕村幸三郎發現的, 刻度在 1、4、10、16、18 和 21 cm 處)。此外, 李奇 (J. Leech) 在 1956 年發現: 長 36 cm 的量尺只須在 1、3、6、13、20、27、31 和 35 cm 處刻上刻度, 也可完成上述度量。

然而該問題的一般結論尚未找到 (比如: ① 長 a cm 的量尺至少要有多少刻度方可完成 $1\sim a$ 的完整度量? ② 一根有 k 個刻度的量尺至多可完成多大範圍尺寸的完整度量?)。

這個問題竟然與 "圖論" 中的 "完美標號" 有關聯, 該問題係 1960 年前後, G. Ringel 和 A. Rosa 開始研究, 1972年由 S. W. Golomb 率先給出定義的。所謂完美標號系指在一個連通圖的所有結 (節) 點處賦值 ($0\sim k$ 的某些值, k 係圖中的邊數), 在其關聯邊上記下相鄰兩結點賦值差的絕對值, 若它們恰好爲 $1\sim k$ 的所有值, 則稱此賦值爲完美標號, 且該圖稱爲優美圖。



輪狀 6 結點完美標號圖

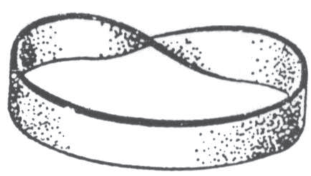


與 13cm 的省刻度尺對應的
完美標號圖

上左圖是一個輪狀 6 個結點的完美標號 (優美) 圖。稍稍推敲不難看到: 省刻度尺問題對應著一類圖形的完美標號問題, 比如上右圖便對應著前面杜登尼的 13 cm 長省刻度尺的刻度問題 (圖中結點賦值即爲省刻度尺的刻度)。

8. 高斯整數環、**Möbius** 帶與積分方程

英國倫敦皇家數學會主席阿蒂亞 (M. Atiyah), 1974年在其就職演講中說到下面一個事實:



代數中的高斯整數環 $\mathbb{Z}[-5]$、幾何中的 Möbius 帶、分析中核函數爲 $a(x,y)$ 的線性微分 – 積分方程這三個看上去風馬牛不相及的問題, 竟有著深刻的內在聯繫, 詳見文 [6]。

例子我們不舉了, 不過這已經使我們看到: 數學中不少課題都被某些無形的紉帶連在一起, 找到了紉帶, 許多已往未曾解決的問題也許有了新希望。費馬大定理的獲證, 正是這種思想成功的範例。

當大定理在人們經歷了 300 餘年的努力而未果時, 人們不得不換一種方式去思維。英人維爾斯 (A. J. Wiles) 聆聽了費萊 (G. Frey) 1984年在德國的一次學術會議報告, 說: “費馬大定理 (猜想) 的眞實性是谷山 – 志村猜想證明後的直接結果”, 此話猶如仙人指路, 使維爾斯茅塞頓開。谷山 – 志村猜想是涉及橢圓方程與模形式 (modular form) 間聯繫的猜測, 說每個橢圓方程件隨著一種模形式 (每條橢圓曲線皆爲模曲線, 即可用模函數參數化)。這樣, 維爾斯只須證明上述猜想, 費馬大定理就將獲證。面壁七年後, 他成功了。

之前, 法爾丁斯 (G. Faltings) 曾將猜想轉化爲微分幾何問題後, 得到 “$x^n + y^n = z^n$, $n \geq 3$ 時若有有理解, 至多有有限個” 的結論, 在猜想證明的過程中抹上濃重的一筆。雖然他沒能完成猜想的證明, 但其思想方法被後來的數學家發揚光大, 並成功地解決了一些問題 (法爾丁斯證得了 Modell 猜想, 即一大類多項式 (u, v) 平面上, 任一虧格不小於 2 的有理曲線 $f(u, v) = 0$ 最多只有有限個有理點)。

從上我們已經看出: 由於數學中某些領域間的聯繫, 使得我們能夠將一些領域中無法解決的問題轉化成另一領域的相應問題, 在那裡或許有機會解決; 不然再將問題轉化到另外領域 ...... 直到問題獲解。

此外, 即使轉化的問題尚未解決, 人們仍希望以此爲契機去考慮他們的問題。例如數論中的 Riemann 猜想 (Riemann Hypothesis):

對於 $\mathrm{Re} z > 1$, Zeta 函數 $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ 所有非顯明複數根的實部都是 $\frac{1}{2}$。
這是一個至今尚未證實的命題, 但數論中不少結論都與它有聯繫, 不少結果可在此假設下得到改進。著名數學家朗道 (E. G. H. Landau) 在其所著「數論講義」中就有一章 “在 Riemann 假設下” 專門論及這方面問題。

我們也想指出: 數學中的某些巧合, 即便人們一時還無法解釋, 但這只是遲早的問題, 人們終會認清它。

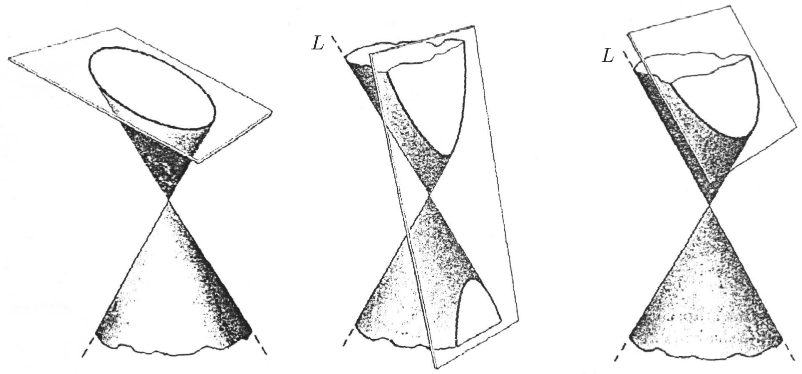
統一才是歸宿

由發現巧合到找到聯繫, 這僅僅是問題的開始, 更重要的工作是推廣結論, 再統一它們。名赫一時的法國 Bourbaki 學派, 正是爲數學的統一而工作著, 其目標是用數學結構概念和公理方法統一全部數學。爲此他們出版了巨著「數學原理」(已出版 60 卷)。

我們已經看到了歐拉用 $e^{-i\pi} + 1 = 0$ 把數學中諸多重要常數統一在一個式子中, 這種統一的例子數學中是不鮮見的。請看:

1. 圓錐曲線

早在兩千多年前古希臘人已經開始研究圓錐曲線: 橢圓、雙曲線、拋物線, 由於它們可統一在圓錐內, 因此而得名。



橢圓　雙曲線　拋物線

圓錐曲線也稱二次曲線, 在笛卡兒坐標系, 它的一般形式爲

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

其中在平移、旋轉變換下的不變量有:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

δ 與 Δ 的正負符號對應著曲線類型 (包括退化的情形):

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	橢圓	橢圓
$\delta < 0$	雙曲線	兩相交直線
$\delta = 0$	拋物線	兩平行或重合直線

其實在極坐標系下圓錐曲線已經統一了, 它們均可用方程式

$$\rho = \frac{ep}{1 - e\cos\varphi}$$

表示 ($e < 1$ 表示橢圓, $e > 1$ 表示雙曲線, $e = 1$ 表示拋物線)。

順便一提: 圓錐曲線還與物理學中的三種宇宙速度有聯繫: 當物體達到某種相應速度時, 其軌道便是相應的曲線:

速度	第一宇宙速度	第二宇宙速度	第三宇宙速度
軌道	橢圓	拋物線	雙曲線

2. 九種幾何

幾何學大體可分爲歐幾里得 (Euclid) 幾何、羅巴契夫斯基幾何 (由 N. I. Lobačeskiĭ 和 J. Bolyai 共同創建, 又稱雙曲幾何) 和黎曼幾何 (1854年由 G. F. B. Riemann 創建, 又稱橢圓幾何), 後兩者是由試圖證明歐幾里得第五公設而引發的。克萊因用變換群觀點將它們統一, 且將全部幾何區分成九種:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">長的測度</td></tr>
<tr><td>橢圓的</td><td>抛物的</td><td>雙曲的</td></tr>
<tr><td rowspan="3">角的測度</td><td>橢圓的</td><td>橢圓幾何</td><td>歐幾里得幾何</td><td>雙曲幾何</td></tr>
<tr><td>抛物的</td><td>伴歐幾里得幾何</td><td>伽利略幾何</td><td>伴閔可夫斯基幾何</td></tr>
<tr><td>雙曲的</td><td>伴雙曲幾何</td><td>閔可夫斯基幾何</td><td>二重雙曲幾何</td></tr>
</table>

3. 分 (碎) 形

這個問題我們已在文 [6] (或見 [12] [13]) 中有過介詔, 該學科的創立正是曼德布魯特 (B. B. Mandelbrot) 從微積分等學科裡人們所臆造的某些 “怪物” (連續不可微函數曲線、周長無窮大而面積有限的曲線等等) 或 “珍稀” (Koch 曲線、Cantor 粉塵、Peano 曲線、Sierpinski 地毯等等) 中, 尋找它們的共同點 (實質)、加工、整理、提煉, 最終概括成 “分數維數” 概念將它們統一成一門新的學科分支 — 分 (碎) 形。

類似的例子又如前蘇聯的柯爾莫哥洛夫 (A. N. Kolmogorov) 受希爾伯特 (D. Hilbert) 第六問題, 即物理學公理化問題的啓發, 成功地完成了概率論的公理化工作。

希爾伯特聽完瑞典數學家霍爾姆根 (Holmgren) 關於積分方程問題的報告, 突然聯想到無窮多變數線性方程組, 認爲它們之間有著密切的相似性, 由此他提煉出泛函分析最初的抽象空間實例, l^2 空間 (平方可和級數空間) 和 L^2 空間 (平方可積函數空間)。

4. 幾個不等式

我們再舉個具體的例子, 在分析中我們遇到過各種不等式: 算術 – 幾何平均不等式、柯西 (Cauchy) 不等式、三角形不等式、冪平均不等式、. . . . . . 等等; 它們間看上去形式不同, 其實卻存在著縝密地聯繫, 且可以統一在一個更強、更普遍的不等式 — 琴生 (Jensen) 不等式中[4]:

三角不等式

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \geq \Big[\sum_{i=1}^{n}(x_iy_i)^2\Big]^{\frac{1}{2}}$$

冪平均不等式

$$\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)^{r} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^r \quad (r\leqslant 1)$$

$\uparrow$　　　　$\uparrow$

$\cdots\leftarrow$ 琴生不等式 $\rightarrow\cdots$

若 $f''(x)>0$ (即 $(f(x))$ 是凸函數), 則對 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 有

$$f\big(\tfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\big) \geq \tfrac{1}{n}[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]$$

$\downarrow$　　　　$\downarrow$

算術 – 幾何平均值不等式

若 $a_k>0$ $(k=1,2,\ldots,n)$

則 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}a_k}$

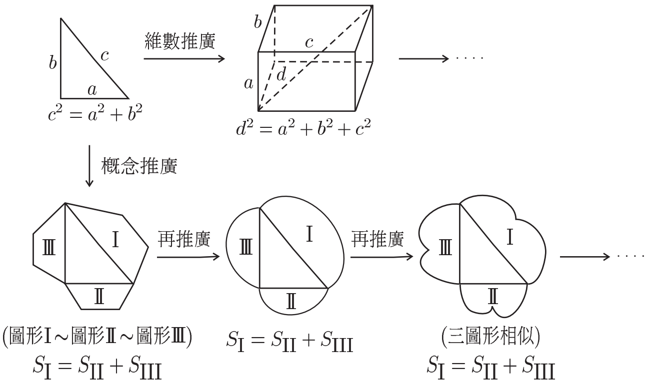
柯西不等式

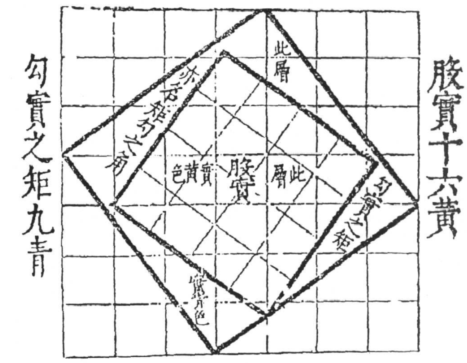
若 $x_i,\ y_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$

則 $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i^2 \geq \Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)^2$

推廣是統一的一種手段

在文 [1] 中, 作者將“長方體三度平方和等於其對角線平方”視爲巧合, 這種說法勢必沖淡了推廣在數學發生、發展中的地位, 因爲它恰恰是畢氏 (Pythagoras) 定理 (在我國又稱勾股定理) 在三維空間的推廣。其實畢氏定理有許多種形式的推廣[4]。





中國古算書上的勾股定理證明圖示

從直角三角形 (長方形) 推廣到長方體, 從長方體推廣到超長方體, 一直到可數無窮維 Hilbert 空間長方體,...... 正是這種推廣的同時, 也將許多數學概念統一了。

再如從一般求和推廣到無窮級數求和, (將離散問題轉化爲連續問題) 到黎曼積分, (當遇到麻煩後) 再到勒貝格 (Lebesgue) 積分和斯蒂吉斯 (Stieltjes) 積分, 而後又出現 Lebesgue–Stieltjes 積分, 它統一了 n 維 Euclid 空間點集上的不同積分概念, 同時也將這些積分有機地

聯繫到了一起。[4]

推廣是人們認識世界、研究世界的重要手段。在數學中, 新概念的產生, 大多是舊概念推廣的產物; 新方法的出現, 大多是推廣中使用工具的改進和發展。推廣也是從具體到抽象、從特殊到一般、從表面到本質、從低維向高維等的過程。[4]

由上看來, 巧合只是引起人們注意的現象, 聯繫則是人們分析巧合後的推論 (斷), 而統一則是推論 (斷) 後的發展, 而這其中的重要手段是推廣。在數學中人們也可以看到: 概念、結論推廣了, 人們又試圖尋找更一般的推廣; 概念、結論統一了, 人們又在力求探索更廣泛的統一, 這也正是數學發展的根蒂。

世界, 不過你所不知道的藝術; 機會, 不過是你看不見的方向; 正因爲此, 我們才應去發現、去深求、去尋覓、去創造、......

參考文獻

1. P. J. Davis, Are the Coincidences in Mathematics, American Mathematical Monthly, 88:5 (1981), 311-320.
2. M. Kline, Mathemaical Thought from Ancient to Modern Times, Oxford Univ. Press, New York, 1972. 鄧東皋等譯, 古今數學思想 (1-4卷), 上海科學技術出版社, 1980.
3. R. Courant, H. Robbins, What is Mathematics? Oxford Univ. Press, New York, 1941. 江浩、朱煜民譯, 數學是什麼, 湖南教育出版社, 1985.
4. 吳振奎, 數學中的推廣、反例及不可能問題, 遼寧教育出版社 (九章出版即將再版), 1993.
5. 吳振奎, 數學中的美, 天津教育出版社 (九章出版社即將再版), 1997.
6. 吳振奎, 分 (碎) 形的思考, 數學傳播 (待發).
7. 吳振奎, 素數個數估計, 數學通訊, 1999(10).
8. 吳振奎, 多角數、雙平方和、n 後問題, 中等數學, 1997(3).
9. 吳振奎, 省刻度尺與完美標號, 中等數學, 1997(1).
10. 吳振奎, Euler 常數 0.5772156 . . ., 中等數學, 2001(1).
11. 吳振奎, 費馬質數與尺規作圖, 中等數學, 1999(3).
12. 林琦焜, 從 Cantor 集到碎形, 數學傳播, 25(1), 3-14.
13. 林琦焜, 數, 十進位與 Cantor 集, 數學傳播, 24(4), 76-86.

—本文作者任職於中國天津商學院—