周界中點三角形中三個有趣的性質

丁遵標

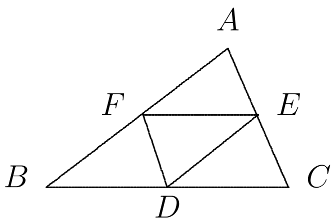
摘要: 本文獲得了與周界中點三角形有關的三個有趣的性質。

關鍵詞: 周界中點; 三角形; 外接圓半徑; 面積。

若三角形一邊上的一點和這邊所對的頂點將三角形的周長二等分, 則稱這一點爲三角形的周界中點, 並將以三個周界中點爲頂點的三角形稱爲周界中點三角形。

本文在文 [1]、文 [2] 的基礎上, 進一步研究周界中點三角形並得到了三個有趣的性質。

引理 1: 設 D、E、F 分別是 ΔABC 的邊 BC、CA、AB 上的周界中點, 且 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$, 則: $AE=BD=s-c$; $AF=CD=s-b$; $BF=CE=s-a$ (證明省略)。



定理 1: 若 ΔAEF、ΔBDF、ΔCDE、ΔABC 的面積分別爲 Δ_A、Δ_B、Δ_C、Δ, ΔABC 的外接圓半徑爲 R, 則有: $(s-a)\Delta_A+(s-b)\Delta_B+(s-c)\Delta_C=\frac{\Delta^2}{2R}$。

證明: $\because \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$,

$$\therefore \sin A=\frac{a}{2R},\qquad \sin B=\frac{b}{2R},\qquad \sin C=\frac{c}{2R}$$

由引理 1 知: $AE=s-c$, $AF=s-b$.

$$\therefore \Delta_A=\frac{1}{2}AE\cdot AF\cdot\sin A=\frac{a}{4R}(s-b)(s-c).$$

由海倫公式 $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 得

$$(s-a)\Delta_A = \frac{a\Delta^2}{4RS}$$

同理: $(s-b)\Delta_B = \frac{b\Delta^2}{4RS}$, $(s-c)\Delta_c = \frac{c\Delta^2}{4RS}$

$$\begin{aligned}\therefore\ & (s-a)\Delta_A + (s-b)\Delta_B + (s-c)\Delta_c \\ &= \frac{\Delta^2}{4RS}(a+b+c) \\ &= \frac{\Delta^2}{2R}\end{aligned}$$

定理 2: 若 ΔDEF 的外接圓半徑爲 R_0, ΔABC 的外接圓半徑和面積分別爲 R、Δ, 則有: $RR_0 \geq \frac{2\sqrt{3}}{9}\Delta$。

證明: 在 ΔAEF 中:

$$\begin{aligned}EF^2 &= AE^2 + AF^2 - 2AE\cdot AF\cdot\cos A \\ &= (AE-AF)^2 + 2AE\cdot AF(1-\cos A) \\ &= (b-c)^2 + 2(s-b)(s-c)(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}) \\ &= (b-c)^2 + \frac{(s-b)(s-c)(a-b+c)(a+b-c)}{bc} \\ &= (b-c)^2 + \frac{4(s-b)^2(s-c)^2}{bc} \\ &\geq \frac{4(s-b)^2(s-c)^2}{bc}\end{aligned}$$

$$\therefore EF \geq \frac{2(s-b)(s-c)}{\sqrt{bc}}$$

同理: $DE \geq \dfrac{2(s-a)(s-b)}{\sqrt{ab}},\quad DF \geq \dfrac{2(s-c)(s-a)}{\sqrt{ca}}.$

$$\begin{aligned}\therefore DE+EF+DF &\geq 2\Big[\frac{(s-a)(s-b)}{\sqrt{ab}} + \frac{(s-b)(s-c)}{\sqrt{bc}} + \frac{(s-c)(s-a)}{\sqrt{ca}}\Big] \\ &\geq 6\sqrt[3]{\frac{[(s-a)(s-b)(s-c)]^2}{abc}} \quad \text{(算術平均 $\geq$ 幾何平均)}\end{aligned}$$

又 $\because abc = 4R\Delta,\quad \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$\therefore DE+EF+DF \geq 6\sqrt[3]{\frac{\Delta^4}{4R\Delta S^2}} = 6\Delta\sqrt[3]{\frac{1}{4RS^2}} \tag{1}$$

$$\because S = \frac{1}{2}(a+b+c) = R(\sin A + \sin B + \sin C)$$

且易證 $\sin A + \sin B + \sin C \leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore S \le \frac{3\sqrt{3}}{2}R. \tag{2}$$

同理可得: $DE+EF+DF \le 3\sqrt{3}R.$ (3)

由 (1)、(2)、(3) 得: $3\sqrt{3}R_0 \ge 6\Delta\sqrt[3]{\dfrac{1}{4R\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}R\right)^2}} = \dfrac{6\Delta}{3R}$,

故: $RR_0 \ge \dfrac{2\sqrt{3}}{9}\Delta.$

值得注意的是, 在文 [3] 中, 對垂足三角形也有相同的結果。

定理 3: 若 ΔABC、ΔAEF、ΔBDF、ΔCDE 的面積分別為 Δ、Δ_A、Δ_B、Δ_C, 且 ΔABC 的外接圓半徑為 R, 則有: $\frac{\Delta_B\Delta_C}{s-a}+\frac{\Delta_C\Delta_A}{s-b}+\frac{\Delta_A\Delta_B}{s-c} \ge \frac{\Delta^3}{6R^3}$ 為證明此不等式, 先看下面的引理 2:

引理 2: 若 ΔABC 的三邊長分別為 a、b、c, 面積為 Δ, 則有: $ab+bc+ca \ge 4\sqrt{3}\Delta$。

證明: 已知 $bc=\frac{2\Delta}{\sin A}$, $ca=\frac{2\Delta}{\sin B}$, $ab=\frac{2\Delta}{\sin C}$,

$$\therefore ab+bc+ca = 2\Delta\Big(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\Big). \tag{1}$$

$\because \sin A>0,\ \sin B>0,\ \sin C>0,$

$$\therefore (\sin A+\sin B+\sin C)\Big(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\Big) \ge 9.$$

又易證: $\sin A+\sin B+\sin C \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore \frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C} \ge 2\sqrt{3}. \tag{2}$$

由 (1)、(2) 得: $ab+bc+ca \ge 2\Delta\cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}\Delta.$

故: $ab+bc+ca \ge 4\sqrt{3}\Delta.$

下面, 我們來進一步證明定理 3。

證明: $\because \Delta_A = \frac{a}{4R}(s-b)(s-c),\ \Delta_B = \frac{b}{4R}(s-a)(s-c),$

$$\therefore \frac{\Delta_A\Delta_B}{s-c} = \frac{ab}{16R^2}(s-a)(s-b)(s-c) = \frac{\Delta^2}{16R^2 s}ab.$$

又 $\because$ 易證 $S \le \dfrac{3\sqrt{3}}{2}R,$

$$\therefore \frac{\Delta_A\Delta_B}{s-c} \ge \frac{\Delta^2}{16R^2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}R}ab, \quad = \frac{\Delta^2}{24\sqrt{3}R^3}ab.$$

同理: $\dfrac{\Delta_B\Delta_C}{s-a} \geq \dfrac{\Delta^2}{24\sqrt{3}R^3}bc, \quad \dfrac{\Delta_C\Delta_A}{s-b} \geq \dfrac{\Delta^2}{24\sqrt{3}R^3}ca,$

$\therefore \dfrac{\Delta_B\Delta_C}{s-a} + \dfrac{\Delta_c\Delta_A}{s-b} + \dfrac{\Delta_A\Delta_B}{s-c} \geq \dfrac{\Delta^2}{24\sqrt{3}R^3}(ab+bc+ca).$

由引理 2 知: $ab+bc+ca \geq 4\sqrt{3}\Delta,$

$\therefore \dfrac{\Delta_B\Delta_C}{s-a} + \dfrac{\Delta_c\Delta_A}{s-b} + \dfrac{\Delta_A\Delta_B}{s-c} \geq \dfrac{\Delta^2}{24\sqrt{3}R^3} \cdot 4\sqrt{3}\Delta = \dfrac{\Delta^3}{6R^3}.$

參考文獻

1. 丁遵標, 三角形中的又一不等式, 中學數學教學, 2002(1): 43。
2. 丁遵標, 周界中點三角形的兩個性質, 安徽教育學院學報, 2002(3): 82, 102。
3. 丁遵標, 一個有趣的幾何不等式, 中學數學月刊, 2001(10): 19。

—本文作者任教於中國安徽省舒城縣杭埠中學—