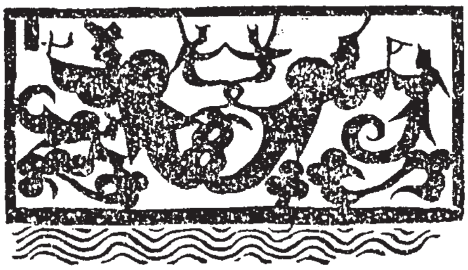
π 論

吳振奎

圓是萬形之源, 方是萬體之基。圓在人們生活中隨處可見。“最完美的圖形是圓” (意大利詩人但丁 (A. Dante) 語)。當然, 圓也是人類最早瞭解的幾何圖形之一: 太陽是圓的, 滿月是圓的, 樹木、花草莖的截面也是圓的, ...。

我國古籍「墨子」上已有 “一中同長” 的圓的定義。對於圓的作法古人也知道: 沒有規矩不成方圓。「史記」中就有夏禹治水時 “左準繩, 右規矩” 的記載。漢朝武梁祠造像中已出現規、矩圖案:



人們很早就會計算圓, 然而它的周長與直徑的比今已知是個無限不循環小數, 它被稱爲圓周率。

古希臘人認爲: 圓周率值是構成萬物的基礎。由此可看出他們對於圓周率值的崇仰。

算圓, 確切地講算圓周率很早就引起人們的濃厚興趣, 這不僅依其自身計算的艱辛而極富挑戰, 其展開式的數字奧秘也更具魅力。兩千多年來, 人們在圓周率的研究、計算上走過漫長而又艱難的旅徑。

一. 圓周率計算小史

如今人們知道: 圓周率是一個無理數, 完全精確計算它不可能。古人起初是給其近似。

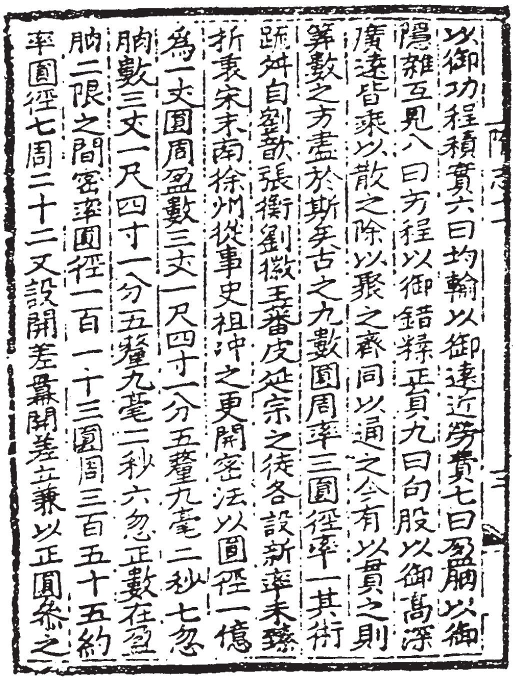
我國古算書「周髀算經」中已有 “徑一周三” 的圓周率記載, 人稱 “古率”, 西方「聖經」中也有圓周率取此值之說 (「舊約」中「列王記」第七章)。

古代埃及蘭德紙草 (1858年爲蘇格人 H. Rhind 收藏而得名) 中給出圓周率的值爲 [4]

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \approx 3.1604...$$

歐幾里得 (Euclid) 幾何的出現, 使得圓周率的計算與正多邊形聯繫起來。由阿基米德 (Archimedes) 創造的圓內接或外切 (從正六邊形起始) 正多邊形邊數不斷加倍, 來求圓周率近似值的方法 (這在我國稱爲 “割圓法”) 差不多延續了兩千年光景, 這兒不擬詳述, 概況請見下表中部份資料 [3]:

年 代	發 現 (明) 者	方 法 及 出 處	結 論
公元前240	阿基米德	割圓法 (載「圓的度量」) 至正96邊形	$\frac{223}{71}$ 與 $\frac{22}{7}$ 之間值約 3.14
150	托勒玫 (C. Ptolemy)	割圓法 (載「數學匯編」)	$\frac{377}{120} \approx 3.1416$
約480	祖沖之	割圓法至正192 ∼ 3072邊形	$\frac{22}{7}$ (約率)、$\frac{355}{113}$ (密率)
530	[印] 阿利亞波塔 (Aryabhata)		$\frac{62832}{20000} = 3.1416$
1150	[印] 波什迦羅 (Bhāskara)	割圓法至正384邊形	$\frac{3927}{1250} = 3.1416$
1579	[法] 韋達 (F. Viète)	割圓至正$6 \cdot 2^{16}$邊形	3.141592654
1585	安索尼措恩 (A. Anthoniozoon)		$\frac{355}{113}$
1593	[荷] 阿·羅芒烏斯 (A. Romanus)	割圓至正2^{30}邊形	小數點後15位
1610	[德] 魯道夫 (Ludolph van, C.)	割圓至2^{62}邊形	小數點後35位
1630	格林貝格 (Grienberger)		小數點後39位


以御功程積實六曰均輸以御遠近勞費七曰盈朒以御
隱雜互見八曰方程以御錯糅正負九曰句股以御高深
廣遠皆乘以散之除以聚之齊同以通之今有以貫之則
算數之方盡於斯矣古之九數圓周率三圓徑率一其術
疏舛自劉歆張衡劉徽王蕃皮延宗之徒各設新率未臻
折衷宋末南徐州從事史祖沖之更開密法以圓徑一億
為一丈圓周盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽
朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽正數在盈
朒二限之間密率圓徑一百一十三圓周三百五十五約
率圓徑七周二十二又設開差冪開差立兼以正圓參之

「隋書·律歷志」中記載祖沖之計算圓周率精確到小數點後第六位

值得一提的是: 魯道夫曾請人將他花費畢生精力算得的 π 值刻在他的墓碑上, 人稱 “魯道夫數”。

三角學的出現, 使得人們對於圓周率的計算又多了一種方法 — 利用反三角函數。微積分發明後, 又將它與級數聯繫到一起, 從而使得圓周率的計算速度大爲提高。π 值計算部分公式及結果 (用級數方法) 請看下表 [3]、[1]:

年代	發 現 (明) 者	方 法 及 出 處	結 論
1699	夏普 (A. Sharp)	$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$	小數點後71位
1706	馬青 (J. Machin)	$\frac{\pi}{4}=4\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{5}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{239}$ 及上式	小數點後100位
1719	朗依 (De Lagny)	$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$	小數點後112位
1841	W. Rutherford	$\frac{\pi}{4}=4\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{5}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{70}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{99}$	小數點後200位
1853			小數點後400位
1873	尙可斯 (W. Shanks)	$\frac{\pi}{4}=4\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{5}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{239}$	小數點後707位
1948	D. F. Ferguson	$\frac{\pi}{4}=3\ \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{4}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{20}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{1985}$	小數點後808位

表中尙可斯的計算裡第528位有誤, 因而他的正確位數只有527位。又最後一行是電子計

算機問世前, 靠人的手工計算的圓周率最多位數。

電子計算機出現後, 人們在圓周率計算上有了長足進展, 隨著計算機的進步和計算方法的改善, 人們可以在不很長的時間內, 算出過去靠手工根本無法完成的工作, 儘管取 π 的40位值就足以使得銀河系周徑的計算精確到一個質子大小。

下面是這方面工作的部分成果 [12]、[3]:

年份	計 算 者	計 算 機 型 號	花費機時 (小時)	結果數位 (小數點後)
1949	Aberdeen	ENIAC	–	2037
1959	F. Genuys	IBM 704	–	16167
1961	J. W. Wrench	IBM 7090	–	100265
1973	Guillarol	CDC 7600	–	10^7
1986	Bailey	Cray-2		2.9×10^7
1986	[日] 金田康正	HITACHI S-810/20	8	3.3554×10^7
1987	同上	NEC s×2	36	2^{27} (約 10^8)
1988	同上	HITACHI s-820	6	2.01326×10^8
1989	同上			5.3687×10^8
1989	[美] 格戈里 (Gregory) 等	IBM 3090		10.1×10^8
1995	[加] 伯爾溫 (Bulwer) 等		56	42.9×10^8
1997	[日] 金田康正		37	515.396×10^8
1999	同上	HITACHI SR8000	37	2061.5843×10^8
2002	同上	HITACHISR8000/MPP	601	12411×10^8

二. 圓周率的計算公式、方法

前文已述, 圓周率是一個無限不循環小數, 故無法求其精確值, 因而表示起來多有不便。

第一個想到用字母表示它的是英國人奧托蘭特 (W. Oughtred)。1737年他率先用 $\frac{\pi}{\delta}$ 表示圓周率 (π 是希臘文圓周的第一個字母, δ 是直徑的第一個字母)。

據傳此前 (1706年) 英國人瓊斯 (W. Jones) 已率先用 π 表示圓周率了, 而後經歐拉 (L. Euler) 竭力倡舉使得用 π表示圓周率得以廣泛流行、且沿至今日。

如前所述, 我們已大體知道 π 的計算方法有三種:

(1) 阿基米德及我國劉徽發明的 “割圓法” [10]

這裡值得一提的是: 1800年普伐夫 (J. F. Pfaff) 發現, 圓外切與內接正 n 邊形邊數翻倍時, 它們的邊有著整齊的關係, 如若記 a_n、b_n 分別爲圓外切與內接正 n 邊形邊長, 則邊數翻倍時有:

$$a_{2n}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\quad b_{2n}=\sqrt{a_na_{2n}}.$$

此公式對於割圓法計算 π 來講是重要和方便的。

(2) 微積分中的級數展開

如 $$\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots\quad (取\ x=1)$$

(3) 橢圓積分變換 [13]

如拉瑪奴揚 (S. A. Ramanujan) 公式

$$\frac{1}{\pi}=\frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\cdot\frac{(1103+26390n)}{396^{4n}}.$$

當然還有一些其他非傳統方法, 稍後我們簡單敍及。下面稍詳開列上述方法中 π 的幾種級數展式結果, 至於割圓法這兒不再囉嗦。

π 的幾個級數表達式

年代	發 現 者	π 的表達式
1579	韋達 (F. Viète)	$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$
1650	瓦里士 (J. Wallis)	$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdots}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdots}$
1650	布魯斯凱爾 (L. Brouncker)	$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1^2}{2+\frac{3^2}{2+\frac{5^2}{2+\cdots}}}$
1671	格列高里 (J. Gregry)	$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$
1699	沙普 (A. Sharp)	$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{3\cdot3}+\frac{1}{5\cdot3^2}-\frac{1}{7\cdot3^3}+\cdots)$
1676	牛頓 (I. Newton)	$\frac{\pi}{3}=1+\frac{1}{4\cdot3!}+\frac{1\cdot3^2}{4^2\cdot5!}+\frac{1\cdot3^2\cdot5^2}{4^3\cdot7!}+\cdots$
1706	馬青 (J. Machin)	$\frac{\pi}{4}=4(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot5^2}+\frac{1}{5\cdot5^3}-\cdots)-(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot239^2}+\frac{1}{5\cdot239^3}-\cdots)$
1735	歐拉	$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$ $\frac{\pi^4}{90}=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$

表中的馬青公式還可以依 $\frac{\pi}{4}$ 的反正切表達式不同而得到不同的級數表達式; 而歐拉的表達式則是他通過大膽類比而猜測的 (後人已給出證明) [22]。即從

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!!} = 0$$

有根 $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$ 而得出。

順便講一句, 歐拉由於對該式的猜測還悟及到:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = \prod_{p\ \text{遍歷質數}}(1-\frac{1}{p^s})^{-1} \quad (s>1)$$

進而黎曼 (C. F. B. Rimann) 引入了 $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ (z 是複數) 即 Rimann 函數且提出了著名的猜想 (若有機會我們另文介詔)。

這些級數已幫助人們大大地加快了 π 的計算速度。隨著計算機運速度的提高, 人們也希望有更好的算法與之配套, 利用某些特殊函數可以做到這一點, 比如拉瑪奴揚的橢圓函數公式, 他是在1914年的文章 "模方程和 π 的逼近" 文中給出的, 即我們前文提到過的公式:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\cdot\frac{(1103+26390n)}{396^{4n}}.$$

1985年戈斯佩爾 (Gosper) 利用上述公式編出程序將 π 算至小數點後1700萬位。

當然, π 有時也可展開成另外某些連分數形式, 比如 (爲的是下面的應用):

$$\pi = 3+\frac{1}{7}+\frac{1}{15}+\frac{1}{1}+\frac{1}{292}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots$$

它的漸近分數依次爲,

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \ldots$$

(請注意 $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ 的最佳漸近性, 它們分別稱"約率"和"密率"自有道理)

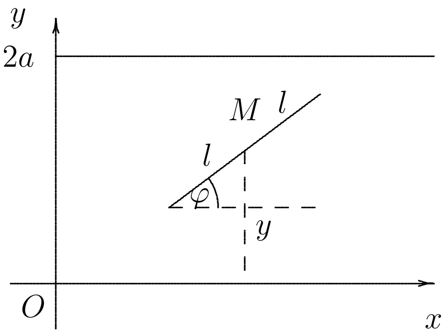
在電子計算機發明以前, 計算 π 值是一項十分艱辛的工作, 因而人們還試圖尋找計算 π 的其他途徑 (看上去似乎 "離經背道", 其實則是另闢蹊徑, 哪怕只是近似計算), 我們僅舉幾類以示代表。

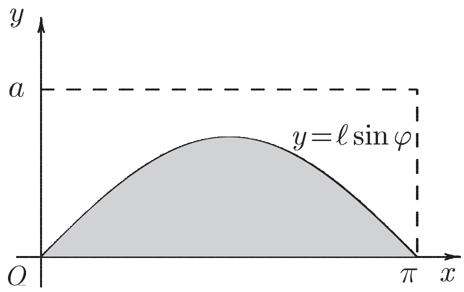
1. 布豐 (G. L. L. Buffon) 投針法 (蒙特卡羅法) [14]

18世紀末法國數學家布豐對概率論在博奕遊戲中的應用感興趣, 於1777年提出 (他是在1773年發現的) 隨機投針的機 (概) 率與 π 之間的關係 (以題爲 "或然性的算術嚐試" 發表):

平面上作距離爲 $2a$ 的一組平行線, 然後隨機地向上面擲一顆長度爲 $2l$ 的針 (或細鐵絲)。針落下後有兩種情形發生: 或著針與平行線中的某條相交, 或者與任何平行線皆不相交。

記下投針總次數 N 與針和平行線相交的次數 n, 則 $\pi \approx \frac{2lN}{an}$。





它的道理我們簡述如下:

設針長爲 $2l$, 且 M 爲其中點, 又 y 爲 M 至其最近平行線的距離, 且 φ 爲針與平行線的夾角。這樣:

$$0 \le y \le a, \quad 0 \le \varphi \le \pi.$$

顯然, 針與平行線相交 $\Longleftrightarrow y \le l \sin\varphi$。

這樣, 針與平行線相交的概率

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{l\sin\varphi} dy \\ &= \frac{1}{\pi a}\int_0^{\pi} l\sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{2l}{\pi a}. \end{aligned}$$

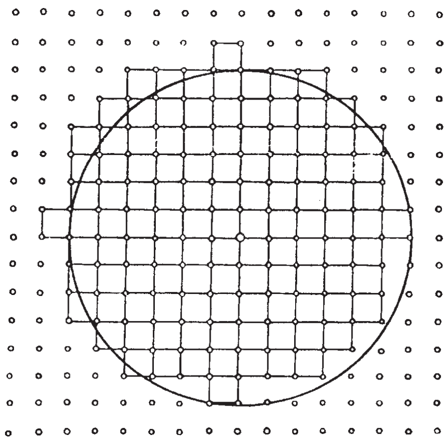
由於 $\pi = \frac{2l}{ap} = \frac{2l}{a}\cdot\frac{1}{p}$, 又 $p \approx \frac{n}{N}$, 則 $\pi \approx \frac{2l}{a}\cdot\frac{N}{n}$。

下表給出歷史上四人通過投針得到 π 的近似值情況:

年份	試驗者	a	l	N	n	π 值
1853	Wolf	45	36	5000	2532	3.1596
1855	Smith	–	–	3204	1015	3.1535
1894	Fox	–	–	1121	357	3.1419
1911	Lazzarini	3	25	3408	1808	3.1415929

順便一提: 此方法後來發展成爲一種風格獨具的數值計算方法—Monte Carlo 法 (又稱隨機試驗法), 它既能求解確定型問題, 又能求解隨機型問題。隨著電子計算機的進步, 該方法在計算數學中的地位越來越重要。至於投針終止次數 N 的選擇, 勢必影響著 π 值的精度, 由此引發一門新的學科分支 — 最優停止論的出現。

2. Gauss 的格點法 [15]



爲了近似計算 π 的值, 高斯 (C. F. Gauss) 創造了格點法: 在半徑爲 r 的圓中數出其中所含的格點數 $f(r)$, 這裡圓心位於某一格點處, r 爲一整數, 從面積關係可以推得 π 值滿足 $f(r) \approx \pi r^2$。比如我們若得到下表數據 (這兒以格點右下角位於圓內算):

r	10	20	30	100	200	300	$\cdots$
$f(r)$	317	1257	2821	31417	125629	282697	$\cdots$

因高斯推得 $\left|\frac{f(r)}{r^2} - \pi\right| < \frac{4\sqrt{2}\pi}{r}$, 故 $\lim_{r\to\infty}\left|\frac{f(r)}{r^2} - \pi\right| = 0$, 即 $\lim_{r\to\infty}\frac{f(r)}{r^2} = \pi$。故由上表數據我們可有下面諸個 π 的近似值

r	10	20	30	100	200	300	$\cdots$
$\frac{f(r)}{r^2} \approx \pi$	3.17	3.1425	3.134	3.1417	3.140725	3.14107	$\cdots$

上表最後一數已精確至 π 的小數點後第3位。

3. 由星際分佈觀測推算 π

1995年英國「自然」雜誌4月號上刊載了伯明翰阿斯頓大學計算機科學和應用數學系的羅伯特·馬修斯 (R. Matthews) 提出利用夜空中亮星分佈的觀測推算 π 的值。其理論基礎是: 任取兩個自然數, 其互質的概率是 $\frac{6}{\pi^2}$。

他挑選了夜空中100個最亮的星, 然後分別計算每對之間的角距。他檢查了其中100萬對因子, 從中獲得的 π 值約爲3.12772, 其誤差沒有超過0.005。

當然人們還可以用許多其他方法計算 π 值, 比如利用 Euler 函數 $\varphi(n)$ (小於 n 且與 n 互質的整數個數) 等, 這兒不再贅述 (看上去似乎是捨近求遠, 然而不失爲一種方法)。

三. $\boldsymbol{\pi}$ 的數字特徵

圓周率值 π 是一個奇妙的數字, 特別是當人們借用電子計算機將它的值算至成百上千億位後, 更是從中發現了許多奧妙。先來看個小例子 [3]。

π 的前六位數字3.14159... 中, 314159本身是一個質數, 不僅如此, 請注意:

$31 + 41 + 59 = 131$ 是一個質數;

$31^2+41^2+59^2=304091$ 也是一個質數;

314159的逆序數951413還是一個質數。

我們再來看看 π 中的其他數字現象。

首先看重覆數字的出現的情況: π 的小數點後710150位後連續出現七個3, 而在3204765位後又連續出現七個3。

從24658601位開始連續出現九個7, 此外還有連續出現九個8、九個9等數字現象。

在 π 的小數點後 995998 位開始出現數字 23456789 這種除1之外的全部數碼的有序排列; 而在 2747956 位起出現 876543210 這種數碼的倒序; 同時在 26160634 位開始出現 2109876543, 它恰好是十個數碼的有序排列 (稍有打亂)。

在 π 的小數點後一千萬位中, 數碼314159至少出現6次; 3141592出現5次; 31415926只出現兩次。

從3開始 π 的連續數字中至某一位恰好是質數的, 人們至少發現4個, 它們分別是: 3、31、314159 和 31415926535897932384626433832795028841。

反序中的質數則更多 (從3至某數位全部數字的反序) 比如: 3、13、51413、951413、2951413、53562951413、...

從52638位起連續出現14142135這八個數字, 它恰好是 $\sqrt{2}$ 的前八位數字。

又 π 的小數點後一、三、七位數字和分別是:

$$1,\ 6(=1+4+1),\ 28(=1+4+1+5+9+2+6),$$

它們恰好是三個完全數 (你還可以看到: $1=1$, $6=1+2+3$, $28=1+2+3+\cdots+7$, 即它們都是三角形數)。

美國人哈肯 (W. Haken) 曾猜測 (至今未獲證):

π 的前 n 位數字組成的數: 3、31、314、3141、31415、... 中不會有完全平方數。

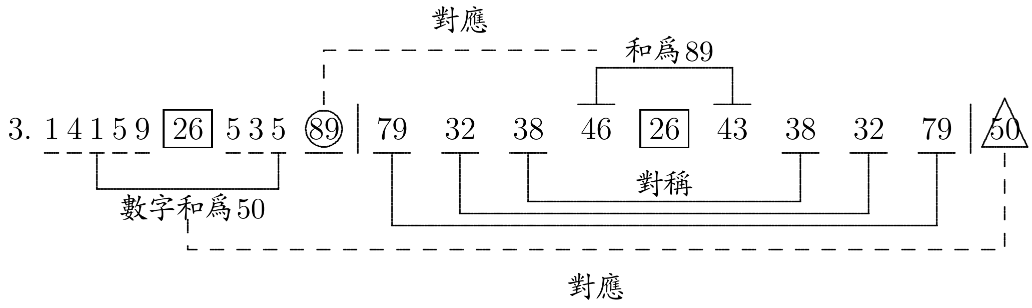
此外, 對於 π 的展式中十個數碼出現的多寡等問題, 法國人讓·蓋尤 (M. J. Guilloud) 統計了 π 的前100萬位數字中十個數碼出現的頻率, 得出的結論是大致相同 (見表):

數 碼	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
出現次數與平均値的差異	−41	−242	+26	+229	+230	+259	−452	−200	−15	+106

這個問題又稱數字正則問題 [13], 即 π 的展式中十個數字出現的極限頻率是否均勻 (即皆爲 $\frac{1}{10}$), 且任意長度爲 n 的數字串出現的極限頻率是否皆爲 10^{-n}?

然而這一點人們尙不詳 (由此它影響 π 的展開數字能否當作爲隨機數使用)。

對於 π 中數字也還可從趣味角度去探索, 比如有人研究了 π 的前32位數字出現的有趣數字現象 [1]、[25], 將其中的某些數字框、圈後:



仔細觀察可以發現: 此32個數字中有兩個26, 以第二個26爲中心前後有三對對稱數字: 79、32、38分佈其兩旁; 且其前後兩個兩位數之和爲89, 它恰好是32個數字中前13個數字中的末兩個組成的數。

前13個數字以26爲中心, 前後五數總和爲50, 它恰好爲此32個數字中末兩位數字組成的兩位數50對應。

此外前面所述三對數79、32、38的諸數字和恰好爲32。類似的問題不多講了。

四. $\boldsymbol{\pi}$ 與 $\boldsymbol{e}$ 及其他

π 在數學乃至整個自然科學中, 皆有重要應用, 人們在研究、計算、應用的同時, 也順便發現了它的某些有趣特性以及它與其它重要常數間的關聯。

用0、1、2、...、8、9這十個數字 (每個皆要用, 且僅用一次) 組成一個分式去表示 π 值, 其中近似程度最高的是:

$$\frac{97468}{31025} = 3.1415954875\ldots$$

它的精度已達小數點後5位 (當然還有其他表達式, 如 $\frac{37869}{12054}$、$\frac{76591}{24380}$、....、但精確度不如上式)。

一位美國名叫舒伯特 (G. Shombert) 的學者認爲: 在 π 的展開式中必然會出現自然對數底 $e = 2.718\ldots$ 的前 n 位數字, 且與3.141... 交替出現, 即有

$$3.141\cdots2718\cdots3141\cdots2718\cdots$$

然而這只是猜測而已。可加拿大渥太華的一位化學家杜格伯格 (R. G. Dugglebg) 發現:

$$\pi^4 + \pi^5 \approx e^6,$$

請注意 $\pi^4+\pi^5 \approx 403.42877...$, 而 $e^6 \approx 403.42879...$, 它們之間相差不到0.00005。當然它們之間更縝細的關係早在兩百多年前已由歐拉給出:

$$e^{i\pi}+1=0 \quad 或 \quad e^{i\pi}=-1.$$

此外也有人從 π 和 e 的展式中尋找數字規律, 且發現: 它們在第13、17、18、21、34、... 等數位上的數碼相同:

數位 / 常數	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	$\cdots$	**13**	$\cdots$	**17**	**18**	$\cdots$	**21**	$\cdots$	**34**	$\cdots$
π	3	1	4	1	5	$\cdots$	9	$\cdots$	2	3	$\cdots$	6	$\cdots$	2	$\cdots$
e	2	7	1	8	2	$\cdots$	9	$\cdots$	2	3	$\cdots$	6	$\cdots$	2	$\cdots$

他甚至猜測: π 和 e 展式數碼平均每10位將會有一次重迭。這一猜想至今尚未獲證 [21]。

π 的奇特的數字現象及它與某些數學結論的聯繫, 有些事出偶然, 有些則蘊含著極爲深刻的數學背景, 或許目前我們還不曾認識 (其實公式 $e^{i\pi}+1=0$ 已對上述現象作了詮釋, 只是人們尚未完全 "解讀" 它), 這一點亦可見 [23]。

比如, 1800年德國數學家高斯發現: 若記 $R(z)$ 爲自然數 z 表成兩整數平方和的方式數, 則 $\lim_{z\to\infty}\frac{R(z)}{z}=\pi$。此即說: 從平均意義上講, 非負整數表成兩整數平方和的方法 (種類) 數的數學期望值是 π。這裡面奧秘人們尚不知曉。

數學公式中與 π 有關的比比皆是, 比如:

計算階乘估計的斯特林 (Stirling) 公式: $n! \sim \sqrt{2n\pi}(\frac{n}{e})^n$, 概率中計算正態分佈的概率公式: $P(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ 等等。

五. $\boldsymbol{\pi}$ 的超越性

人們很早就認識到 π 的十進制小數展開式無限且不循環性, 然而眞的確切證明這一點卻是晚近的事情 (其實, 這一點亦可從割圓方法求圓周率中看出)。

1771年萊伯特 (Lambert) 第一個給出 π 的無理性的嚴格證明。

而後法國數學家勒讓德 (A. M. Legenolre) 在考慮無理數分類時, 率先提出超越數概念。

1844年, 柳維爾 (J. Liouville) 指出: 代數無理數不能用有理數 "很好地" 逼近, 也隱約地指出了超越數的存在。他證明了 (這是 Roth 於1995年改進的結論):

若 α 是代數無理數, 則對於任意固定的 $k>2$, 不等式 $|\alpha-\frac{p}{q}|<q^{-k}$ 只有有限個有理數解 $\frac{p}{q}$, 其中 $q>0$, 且 p, q 互質。

其實當康托 (G. Cantor) 證明了代數數 “可數” 時, 已確定超越數存在, 且知超越比代數數 “多得多”。

1873年厄爾米特 (C. Hermite) 證明了 e 的超越性。

1882年林德曼 (C. L. F. Lindemann) 證明了 π 的超越性[21]。

這一點亦可在證得 e 的超越性後簡單說明說明如次。首先我們可以證明: 若 $x_1, x_2, \ldots,$ x_n 是不同的代數數 (實或複的), 又 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是不全爲零的代數數, 則

$$p_1e^{x_1} + p_2e^{x_2} + \cdots + p_ne^{x_n} \neq 0,$$

今取 $n = 2$, $p_1 = 1$, $x_2 = 0$, 有 $e^{x_1} + p_2 \neq 0$。故知當 x_1 是非零代數數時, e^{x_1} 不是代數數 (顯然 $x_1 = 1$ 時, $e^1 = e$ 不是代數數)。

又由 Euler 公式 $e^{i\pi} = -1$, 即 $e^{i\pi} + 1 = 0$, 知 $e^{i\pi}$ 是代數數 (值爲 -1)。而由上 x_1 是非零代數數時, e^{x_1} 不是代數數, 從而 $i\pi$ 不是代數數 (且非零)。

又 i 是代數數, π 則不是代數數, 否則它們的積是代數數。從而 π 是超越數。

由於 π 的超越性證明, 使得尺規作圖三大難題之一, “化圓爲方” 問題得以否定解決。

由上我們已經看出: 由計算圓周率而引發的 π 的計算、研究等問題, 已不單單是幾何計算的課題, 它牽動著數學的許多分支與學科, 比如函數論、計算方法、計算機科學、天體物理學等的研究, π 的涵義早已遠遠超越了它自身! “圓周率值是構成萬物的基礎” 也許並不誇張!

參考文獻

1. 吳振奎, 數學的趣味 (上)、(下), 天津教育出版社, 1985。
2. 吳振奎, 數學中的物理方法, 河南科技出版社, 1997。
3. 吳振奎, 圓周率 π, 中等數學, 5 (2000)。
4. 梁宗巨, 數學歷史典故, 遼寧教育出版社, 1992。
5. 于秀源, 超越數論基礎, 山東大學出版社, 1986。
6. 劉長春, π 的幾種無限表達式, 中等數學, 6 (1990)。
7. H. Eves (歐陽絳譯), 數學史概論, 山西人民出版社, 1986。
8. 李文林主編, 數學珍寶, 科學出版社, 1998。(九章出版社重版)
9. 錢寶琮, 中國數學史, 科學出版社, 1981。
10. 李迪, 中外數學史教程, 福建教育出版社, 1993。
11. 吳文俊, 世界著名數學家傳記, 科學出版社, 1995。
12. 吳振奎等, 今日數學中的趣味問題, 天津科學技術出版社, 1987。
13. D. H. Bailey, J. M. Borwein, P. B. Borwein, S, Plouffe, The Quest for Pi. The Mathematical Intelligencer, Vol.19, No.1, pp.50-57, 1997.
14. 徐鍾濟, 蒙特卡羅方法, 上海科學技術出版社, 1985。
15. D. 希爾伯特, S. 康福森 (王聯芳譯), 直觀幾何, 人民教育出版社, 1964。

16. S. Wagon, Is π normal? Mathematical Intelligencer? No.3, pp.65-67, 1985.
17. 梁宗巨, 世界數學通史 (上), 遼寧教育出版社, 1996。
18. 楊自強等, 你也能用電腦計算 π 到千萬位, 清華大學出版社, 2001。
19. 阿爾伯特·H·貝勒 (談祥柏譯), 數論妙趣, 上海教育出版社, 1998。
20. 張奠宙, 趙斌, 二十世紀數學史話, 知識出版社, 1984。
21. 吳振奎, 數學中的推廣、反例及不可能問題, 遼寧教育出版社, 1997 (九章出版社即將重版)。
22. G. Polya (李心傑等譯), 數學與猜想, 科學出版社, 1984。
23. 吳振奎, 數學中的巧合、聯繫與統一。(本刊待發表)
24. 約翰 · 巴羅 (苗華建譯), 天空中的圓周率, 中國對外翻譯出版公司, 2000。
25. 馬丁 · 加德納 (談祥柏譯), 矩陣博士的魔法數, 上海科技教育出版社, 2001。

—本文作者吳振奎任教於中國天津商學院—