二十世紀數學的演進

石厚高

楔子

美國古代 (不會太古, 美國建國只有二百年) 有位總統, 白天作總統, 晚上作數學, 他是資優美國人。他作甚麼數學? 他作平面幾何。嘻嘻! 他的數學不太資優。跳脫平面幾何的侷限, 他應該作作三角、解析幾何 ...。視野一開, 他會更愛數學。總統不是日理萬機嗎? 美國古代總統不需要日理萬機, 日理百機就行了, 所以他有時間作數學。

The Evolution of Mathematics in the 20th Century, Michael Atiyah, (Edited by Abe Schenitzer and John Stillwell).

這是2000年六月7–9日 Michael Atiyah 在多倫多 (Toronto) 2000年世界數學議的演講, 由 Abe Shenitzer 與 John Stillwell 作整理。本文是數學史, 很值得大家參考, 我把它作個簡介。原載 The America Mathematical Monthly 108, August-September 2001, 654-666。

Atiyah 爲綜合評述過去一百年的數學, 更要預測未來的一百年, 他整體的找些主題, 並強調其間發生了些甚麼。困難在於很難把自己想像成1900年的數學家, 因爲上一世紀的數學很多都被我們的文化吸收了。那個時代, 他們既不用我們的術語思考, 也不用我們的方式思考。這篇講稿共有九段:

1. 局部至全域	2. 增加維數	3. 交換至非交換	4. 線性至非線性
5. 幾何對代數	6. 共同技術	7. 有限群	8. 物理衝擊
9. 歷史總結			

其中以 <5. 幾何對代數> 最爲精闢, 最讓學數學的陣陣暖流湧遍全身。原來數學家和魔鬼打交道, 問魔鬼要部機器, 只要把題目丟進機器答案就出來了; 魔鬼答應了, 可是條件是數學家要把靈魂交出來, 數學家沒有靈魂, 從此就不再用腦筋了。這個機器就是今天的電腦。忘了在那裡看過, 蜜蜂釀成了蜜獻給上帝一瓶, 上帝嚐過一再讚美好東西, 要給蜜蜂獎品; 牠居然要一

根刺, 誰吃了我的蜜就刺死他。上帝很不高興, 爲甚麼這麼自私? 好的, 就給你一根刺, 可是你只能用一次, 用過你就會死。數學家和蜜蜂都付出了慘重的代價。

說兩句題外之言, 我大約十歲在大陸時曾看過一部電影 <出賣影子的人>, 大意是一個人把影子賣了很多錢, 可是他照鏡子時看不到影子, 大太陽下也沒有影子, 生活上有了太多困擾, 所以錢帶給他災難。來台後才知道男主角是嚴俊。

<5. 幾何對代數> 更精彩的是談到「幾何與代數間不同」的觀點, 原來幾何是有關空間的, 而代數本質上是關注時間的。不論那一類代數, 一系列的作業在執行著, 一個又一個, 必需要有時間。我從來沒有聽過, 也沒有看到誰寫過, 更沒有想到過, 所以其它各段都是作個簡介, 本段詮釋的多些。

<9. 歷史總結> 對數學歷史與前景作精簡扼要的介紹, 亦有可觀之處。

Atiyah 談數學, 原來二十世紀數學的演進是個轉移 (shift) 的時代:

1. *局部至全域*: 本來在一個小規模、地區座標的環境裡學習, 本世紀轉向去了解全域、大域的表現。函數定義不僅有明確公式更要有全面的性質: 奇異點在那裡、定義域、何處取值。這些全域性質是函數的特色, 局部的擴展只不過是觀察他的一種方式。

微分方程式、複變分析、微分幾何與數論也出現了相似的狀況。數論家在 “局部論” 裡探討單一的質數, 一次一個, 或者是一組有限個質數, 而 “全域論” 是同時討論所有的質數。質數與點之間的類比、局部與全域之間, 在數論的發展有重要的效果, 發生於拓撲的觀念對數論有衝擊。

2. *增加維數*: 古典複變函數論主要是把單變函數論的變數個數由一個擴展爲兩個。而更多變數主要是發生於本世紀, n 變數的理論愈來愈強勢, 是這個世紀成功事件之一。

微分幾何在過去主要是研究曲線與曲面。現在研究的是 n 維流形的幾何, 高維有點兒虛構, 認識這些觀念並作同等研究才眞正是二十世紀的產物。想到增加函數的個數, 研究的不僅一個函數而是好幾個函數, 或向量值 (vector-valued) 函數。

線性代數從有限維到無限維, 從線性空間到 Hilbert 空間, 爲無限個變數。當然與分析有關。有了多變數函數, 你就能運作函數的函數、泛函數。這些都是空間函數的函數。它們本質上有無限個變數, 我們叫作變分學 (calculus of variations)。老學科普通非線性 (non-linear) 函數有相似的發展, 在二十世紀眞正突起。

3. *交換至不可交換*: commutative 轉至 non-commutative 是二十世紀數學獨有的特色, 植根於十九世紀。Hamilton 四元數作品最爲奇特, 動力源自物理觀念。Grassman 的作品外部代數 (exterior algebra) — 是另一種代數系統, 現已爲微分形式論 (theory of differential form) 所吸收。當然 Cayley 奠基於線性代數的矩陣作品, 以及 Galois 奠基於群論的作品都是精彩場面 (highlight)。群論也是二十世紀的支配者。

4. 線性至非線性: 古典數學根本上是線性的, 至少是接近線性。眞正的非線性現象更爲困難, 只有在本世紀才認眞著手。歐氏幾何、平面幾何、空間、直線, 都是線性; 然後由非歐幾何至 Riemann 更一般的幾何, 本質上都是非線性的了。

在微分方程式, 認眞研究非線性現象營建了全面新氣象。其中 soliton 與混沌是微分方程式論裡兩種非常不同的景觀, 本世紀裡絕對的突出又受歡迎。它們呈現了交替的主題。電磁學的 Maxwell 方程式是線性偏微分方程式。著名的 Yang-Mills 方程式是非線性微分方程式, 因爲 Yang-Mills 方程式本質上是 Maxwell 方程式的矩陣版, 而矩陣沒有交換性的事實, 就在方程式裡產生了非線性項。不可交換並不導致某特殊類非線性, 這一點特別有趣而重要。

5. 幾何對代數: 幾何與代數是數學形式的兩大柱石, 而且都很古老。幾何要回溯至希臘或更古時代; 代數回溯至阿拉伯與印度時代, 他們對數學都曾重要, 可是他們的關係並不和諧。

解析幾何問世之前, 歐氏幾何堅守幾何路線。笛卡爾企圖減輕幾何思維以訴諸代數運用。把牛頓與萊布尼茲的微積分作比較, 他們分屬不同的傳統: 牛頓是幾何學家, 而萊布尼茲是代數學家。牛頓發展的幾何或微積分是用數學描述自然律, 他關注物理, 而物理發生於幾何世界。如果你想了解爲甚麼管用, 你就在物理世界裡思維, 在幾何畫面裡思維。當他發展微積分時, 他要發展的形式儘可能接近於物理場景, 所以他用了幾何論證。萊布尼茲有野心, 要形式化所有的數學, 把它轉向成一個代數機制。牛頓與萊布尼茲打了一架, 後者的記號贏了。我們用他的方法寫導函數。牛頓的精神還在, 可就沉寂良久。

一百年前十九世紀末葉, Poincaré 與 Hilbert 二人分別是牛頓與萊布尼茲的信徒。Poincaré 的思維精神泰半是幾何、拓撲, 用這些觀念作主要內涵。Hilbert 更是個形式主義者; 他要公理化、形式化、嚴格證明、正式呈現。他們分屬不同傳統。

幾何與代數是不同的, 幾何當然是有關空間的。另一方面你也許從未如此想過, 代數本質上是關注時間的。不論你作那一類代數, 一系列的作業在執行著, 一個又一個, “一個又一個” 是說你必需要有時間。在一個靜態宇宙, 你不能想像代數, 可是幾何本質上是靜態的。當我說 “代數” 我並不是僅指近世代數。任何算則, 任何計算處理, 都是一個又一個的循序執行, 現代電腦在這點十分淸楚。

代數關注時間 (time), 幾何關注空間 (space), 代表兩種不同的數學觀點。不能說張三是代數學家而李四是幾何學家, 整體說來我們想要二者兼備。

代數對幾何學家來說可以稱之爲 “浮士德承諾” (Faustian Offer)。代數是魔鬼給數學家的 offer。魔鬼說 “我要給你這個強勁的機器, 他會回答你任何問題。你需要作的就是把你的靈魂給我: 放棄幾何, 你就會得到這個不可思議的機器。” 今天我們可以把他看成是電腦!

代數的目標基本上是產生一個公式, 放進機器把柄搖一搖, 就得到答案。你拿了某些有意義的東西; 把他轉換成公式; 你得到答案。在處理中, 你不需要把對應於幾何中不同的代數舞台多作思考。你失去了洞察力, 在不同的舞台上這一點非常重要。

幾何與代數間二者的分割無法涇渭分明, 例如代數學家常用圖表 (diagram)。除了讓步給幾何直觀, 圖表是甚麼?

6. *共同技術*: 同調論 (Homology Theory) 傳統上由拓撲的分支出發。是個基本的代數工具, 發明於本世紀上半葉, 是一種方式得到有關拓撲空間的資訊; 一些由幾何抽出來的代數, 可以說他是個非線性情況裡的線性不變量的建設。幾何上, 你會想到週期, 加加減減就得到一個空間的同調群。同調論在代數其它分支也有廣泛應用, 同調論證明是分析整體情況的強勁工具, 二十世紀數學的標準特徵。

K-理論 在多方面來說都和同調論相似, 具有廣泛的應用, 根源於數學很多部分。雖然它早已奠基, 直到二十世紀中葉它才出現。K-理論作爲一種技術的基礎。他和同調論相似, 都是要在複雜的非線性狀態取出線性資訊。在代數幾何 algebraic geometry、泛函分析、弦理論 (string theory) K-理論都有精彩表現。

李群 (Lie Groups) 始於十九世紀, 不僅是種技術。起初, 對 Klein 來說藉著這種方式來統一各類幾何: 歐氏幾何與非歐幾何。二十世紀被李群論牢牢支配, 像個統一架構而用於研究很多不同問題。Klein 認爲幾何是均勻空間, 他們都由等距變換群所決定。歐幾里德群帶來了歐氏幾何; 雙曲幾何來自另一個李群。所以每個均勻幾何對應於不同李群。

進入二十世紀, 大域景觀的大域級李群與微分幾何, 帶來了所謂 “示性類” 的資訊。這些拓撲不變量結合了三種關鍵部分: 李群、微分幾何與拓撲, 當然, 代數結合了群。

在更解析的方向上, 得到了不可交換的調和分析。這就是 Fourier 理論的一般化, Fourier 級數或 Fourier 積分本質上對應於圓與直線的交換李群。

在數論, 李群理論影響深遠。對於每個李群, 你就會聯想到與之有關的數論。在這個世紀的後半葉他影響了代數數論成果的很大一部分。模形式的研究與這個故事一致, 包括了 Andrew Wiles’ 在費馬最後定理的成果。

7. *有限群* (Finite Group): 有限單群的分類可以認同, 若干年前有限單群剛剛完成, 但那並不很重要。理由是有限單群的分類裡多數單群是衆所周知。這個領域是關閉了, 這樣說有人會不高興, 因爲他們還在使勁兒挖寶。我出門要穿防彈背心了。

其中有個 “離散群” 名爲 “魔鬼 Monster” 最激盪人心, 和數學其他的很多部分都有出人預料的關聯, 和橢圓模函數、甚至於理論物理和量子場論。分類把自己的大門關上了; 可是 Monster 開了門。

8. *物理衝擊*: 縱觀歷史, 物理與數學聯繫久矣, 數學很大一部分, 如微積分發展是爲了解決物理問題。二十世紀中葉這一點或許變的不明顯了, 多數的純數學獨立於物理之外進展的很好, 可是上個世紀的最後四分之一, 情況有了戲劇性的變化, 物理與數學的交互作用, 特別是幾何。

十九世紀 Hamilton 發展了古典力學, 它導出了 “扭對稱幾何 (symplectic geometry)” 最近的二十年才認眞研究。結果呢, 他是數學非常豐富的一部分。

這個世紀, 群論的較深應用結果是與物理的關係。設定任何一個模式, 對稱是不可或缺的組成分子, 現在流行的不同理論都有基本李群如 $SU(2)$ 與 $SU(3)$, 作爲內建的根本對稱群。所以李群似乎是物質的建造基石。

二十世紀數學的演變是看到了轉移, 維數成了無限大。物理學家更上層樓。在量子場論他們眞正要研究無限維空間, 那裡的無限維空間是標準的各類函數空間。所以正如二十世紀大部分數學關注幾何、拓撲、代數與分析在有限維李群與流形上的發展, 物理這部分相似的處理在無限維。

9. 歷史總結: 18與19世紀併論, 可以稱之爲古典數學時代, 那是和 Euler 與 Gauss 有關的時代, 古典數學都有了好結果與發展, 幾乎是數學的完結篇, 可是20世紀相反, 眞的是多產。

20世紀前半葉爲 “特殊時代” 所支配, 這個時代 Hilbert 要把一切公式化再小心定義, 影響深遠。後半葉絕對超越了 “整合時代”, 技術從這個領域進入其他領域, 混合到了驚人的程度。

21世紀呢? 也許是量子力學的時代也可以說是無限維數學。這意味著徹底了解 (understanding properly) 分析、幾何、拓撲、多樣化非線性函數空間的代數 (algebra of various non-linear function spaces) 的嚴格證明。

21世紀還會有些甚麼? 那就要強調 Alain Connes 不可交換微分幾何的整合理論, 結合了分析、代數、幾何、拓撲、物理與數論, 都對某部分有所貢獻。他是個架構, 讓我們能作微分幾何通常能作的事, 包括就非交換分析而論的與拓撲的關係。

我們預期物理的衝擊一往直前直到數論, 在物理裡脫穎而出表現突起的是 “對偶 dualities”, 在線性理論裡, 對偶僅限於傅立葉變換 (Fourier Transform)。可是在非線性理論裡, 如何取代一個傅立葉變換是項大挑戰。了解這些非線性對偶似乎是下一世紀大挑戰之一。

最後我這個老頭兒要說的是: 下個世紀有很多事給大家作。

—作者曾執教建中現已退休—