有朋自遠方來——
專訪 Greiner 教授

策　劃 : 劉太平
訪　問 : 李宣北 (以下簡稱「李」)
　　　　黃啓瑞 (以下簡稱「黃」)
時　間 : 民國93年1月6日
地　點 : 中央研究院數學所
整　理 : 李宣北

Peter Greiner 教授 1938 年生於匈牙利, 1960 年 University of British Columbia 學士, 1964 年 Yale University 博士。自 1965 年起任教 University of Toronto, 專長線性偏微分方程, 學術論著豐富, 對 $\overline{\partial}$-Neumann 問題有獨到深入的研究。Greiner 教授並曾擔任數種數學期刊的主編或編委。

一. 成長

李: 請您談談您的成長環境, 從事數學研究的心路歷程, 您對研究工作的看法, 就從您的童年談起吧!

Greiner: (以下簡稱「G」) 我從沒想到要成爲數學家。我在匈牙利的一個醫生家庭長大, 父親和伯父都是醫生, 身爲長子, 家中共有三個男孩, 很自然的從小就認定要作醫生。高中時我喜歡所有的科學課程; 我非常喜歡化學, 不過數學是我的最愛, 我能解決難題, 卻從沒想過要以數學爲一生志業。所以1956, 18歲那年我進入布達佩斯的醫學院, 六個星期後爆發了革命, 醫學院和其他的學校都關閉了, 我回到父母親住的小鎮 Sopron, 緊鄰維也納就在奧匈邊界附近。我母親能說多種語言從小就嚮往西方。所以, 一天我們就動身到維也納再轉往英國, 我有個舅舅在英國, 盤桓兩個月, 最後我們定居加拿大溫哥華, 那是1957年初的事。我到大學 (University of British Columbia) 去和院長討論入學的事, 因爲我曾在匈牙利大學註册, 而得到匈牙利入學許可是和得到德國入學許可一般, 是相當困難的 (也許沒有日本那麼難) , 所以院長說這抵得過兩年, 因此我從第二年開始。由於父親希望我成爲醫生, 可是

歐洲與北美學制不同, 在歐洲唸完高中直接進入醫學院, 德國、匈牙利需要修業六年然後實習, 英國則是五年再加一年實習; 而北美洲高中畢業想要學醫需先在大學修習醫預科, 那是什麼呢? 基本上你需要修幾門英文, 也許一門數學, 一門物理, 有機化學, 也許兩門化學, 可是三年醫預科每年有五門課, 這表示你可以自由選擇其他任何課程, 在這個醫生養成教育中你學到的不多, 這個制度不過是讓你對選擇從醫稍稍確定些, 因爲在美洲十八歲比起歐洲的十八歲是太嫩了些, 美洲的十八歲在高中學的很少, 在歐洲高中生必須非常用功。我問院長我該選哪些課來修滿三年的學分, 他說隨你自己的意願。當然在北美人人想進醫學院, 競爭激烈之下, 最好的策略就是盡量選最輕鬆的課, 好拿最高的分數。但是我不在意這些, 我自認是相當好的學生, 所以我對院長說我要選開給優等生的高級數學來塡滿我的時數。就這樣我修數學, 第三年原本該申請醫學院, 我決定延後一年好唸完我的數學課程。University of British Columbia 的數學系和物理系頭三年都是一樣的, 第四年才分開, 所以從第二年到第四年我修數學, 第四年申請醫學院得到入學許可, 不過我也和一位教授合寫了一篇論文, 我的第一篇論文是關於矩陣理論的, 我從中得到很多樂趣, 因爲你能悠遊於矩陣中, 有些像組合學, 你不需要學很多但是只要願意你可以作蠻難的事。因此我同時也申請美國四所大學的研究所, 全被錄取, 我不知道該怎麼辦, 去跟教授們商量, 與我合寫論文的這位教授是矩陣學家畢業於 University of Wisconsin, 他說去 Wisconsin, 另一位年紀較大的是 Yale 的 Ph.D, 他說去 Yale, 那四所學校是 Phliadelphia (University of Pennsylvania), MIT, Yale 和 Wisconsin, 他說四所都是好學校, 不妨到名氣最大的學校, 就去 Yale 吧, 所以我就去了。我告訴醫學院院長我要休學一年去念數學再回來, 他勸我別去, 因爲去了, 你就不會回來了, 果然如此。

二. 踏入數學研究

在 Yale 數學系, 我選了些課, 學到的不多, 第二年起我成爲一位非常有名的數學家 Felix Browder 的學生, 他是當時數學界響噹噹的人物, 說起話來似乎什麼都知道, 某種程度來說他也確實如此, 基本上我不曾從他那裡學到很多。他給我的第一篇文章是關於 Schwartz Functions 的, 作者是 Laurent Schwartz, 他說:「你看看這篇文章, 因爲我看不懂」, 我看了, 也看不懂。於是他又給我另一篇日本數學家 Ikeve 關於 Scattering Theory 的文章, 我將裡面的結果推廣寫成我的博士論文。1964 年左右工作機會很多, 你沒有開口, 工作就找上你來。我沒有申請, Princeton 自動給了我兩年講師的職位, UCLA 給我 tenure track 的職位。現今當然要選擇 UCLA, 不過在那時候 Princeton 的講師遠比 UCLA 的 tenure track 來得重要, 因爲你總可以在什麼地方找到永久教職, 那不是那麼要緊。我畢業那年北

美有 400 位新 Ph.D, 六年後是 2000, 從此找工作就難了。在 Princeton 時我聽了些課; E. Stein 的課講得極好, 我也試著去聽 S. Bochner 的課, 他講課眞是無可救藥, 記得我聽他的第一堂課, 他走進教室四下環顧在座的學生, 然後說「數學中最重要的就是乘法」, 說完就離開了, 這堂課他就說了這麼一句話, 自然以後我沒有再去聽他的課。Bochner 是我的偶像之一, 我想告訴他關於我論文所做的東西, 有一天總算有機會講給他聽, 我正在寫黑板, 偶一回顧瞥見他睡著了, 於是我踮起脚尖輕手輕脚地溜出去生怕吵醒他。那時我還不是加拿大公民, 加拿大方面要我回到加拿大取得公民身份, 雖然 Princeton 的講師是兩年的工作, 我於一年後應 University of Toronto 之聘回到加拿大直到今天。頭幾年非常艱苦, 因爲我試著做數學卻不知做什麼好, 我很努力的嘗試, 甚至也寫過一篇 elliptic boundary value problem 的文章, 不過不是很好。我的博士論文關於散射理論也不是那麼有意思, 我不知如何是好。我記得那三年經常在午夜夢回時沈吟自己選擇數學是不是錯了, 因爲如果你是醫生或是工程師, 你有很好的工作, 你知道該做些什麼, 旁人瞭解這是不簡單的工作, 又有優厚的報酬, 是很理想的科學性的工作。但是作爲一個數學家或物理學家, 只在大學教書是不夠的, 如果你不能眞正做些研究, 這一生將黯淡無趣, 因爲這是我們之所以存在的理由 (raison d'étre)。能不能做研究這件事對每個人而言不是那麼清楚的事, 有些人非常聰明, 腦筋很快解題很漂亮, 但是做研究意味著你所遭遇的是未知的事物, 那是完全不同的。

漸漸的, 我開始做一些東西, 說起來要回到在 Princeton 做講師的時候, 當年 Fine Hall 還是一個矮建築 (如今是大樓), 容納我們這些講師的研究室就在後面小建築的地下室, 那裡有個小圖書室, 書、期刊不多, 但有數學家們在 Princeton 時寫就論文的 preprint, 在那裡我看到了 Kohn 1964 有關 $\overline{\partial}$-Neumann Problem [1] 論文的 preprint, 我拿起來, 從此窮一生之力鑽研其中。當時的我對裡面的內容一竅不通, 我只是看著它, 覺得它吸引我, 是一種難以言說的第六感。剛到 Toronto 時, 我對這個問題不太能做些什麼, 然後我先開始讀 D. C. Spencer[2] 的文章, Spencer 的東西比較代數, 當然他的東西也不容易懂。記得 Spencer 第一次到 Toronto 來演講, 事前我就整理了一頁關於 Spencer 過去工作中的東西, 在演講前發給與會的同事, 事後他們問我你怎麼知道他會講什麼, 我雖仍不了解他的東西, 但 Spencer 有種特殊的氣質。最後我開始大量閱讀 Hörmander 的工作, 這是我在 Toronto 第一年的工作情形。我讀 Hörmander 的博士論文, 還有發表的文章等等, 對 Egorov (蘇聯數學家) 的工作印象深刻。1970年左右, Kohn 發表了一篇文章, 基本上是關於2維複空間中 pseudoconvex domain subelliptic 估計成立的充分條件, 我覺得用 Hörmander 和 Egorov 的結果, 我可以給出必要條件。我證明了 Kohn 的充分條件也是

[1]參見數學傳播25卷2期 (98),「有朋自遠方來—專訪 J. J. Kohn 教授」和「$\overline{\partial}$-Neumann 問題簡介」。

[2]Spencer 是最先提出這個問題的數學家, 關於 Spencer 參見數學傳播25卷1期 (97), 「遊裡工夫獨造微—小平邦彥」。

必要條件。我希望能做得更精確, 想算出某些準確的估計。但是沒有成功, 原因是 Egorov 的文章中有些地方完全錯了。類似的經驗我在蘇聯數學文章中遇到過兩次, 從此, 我再不相信他們的文章。總之, 我把結果寫出來發表, 雖然我認爲只不過將 Hörmander, Egorov 的估計與 Kohn 的形式結合起來然後局部化 (localize), 微局部化 (microlocalize), 如此而已, 沒什麼不得了, 但是大家覺得用這個結果很有意思, 發表在 Journal of Differential Geometry。然後我接到些講演訪問的邀約。我算是打開了 $\overline{\partial}$-Neumann 問題的門, 雖然我還是不完全了解它。

三. 專研 $\overline{\partial}$-Neumann 問題

1973∼1974 我第一次年休, 到 Princeton 高等研究所。那是炎熱的夏天, 我萬萬想不到 Princeton 的夏天竟熱到這個地步, 人家說 Princeton 是北方的南疆, 是南方的北界, 卻出奇的熱, 我七月到 Princeton, 從未經歷如此的炎熱, 一天得沖三, 四回澡。我打電話給 E. Stein, 到他研究室去見他, 當然他不記得我, 他告訴我他與 Folland 剛完成的工作, 他們可以做邊界的估計 (Estimates of $\overline{\partial}_b$-complex on Heisenberg group) 我突然說「那麼我能做內部的估計。」自然, 我就開始這一部分的工作也和他進行許多的討論, 最後我和他說希望他對這個工作感興趣, 我們可以一起合作, 他說, 他正有此意, 我記得很淸楚那是初秋時分。不過他和 Folland 做的邊界的估計並不足以解決 $\overline{\partial}$-Neumann 的內部估計, 還需要額外的東西, 就是關於算子的方根的結果。我不知該如何下手, 試了又試, 沒有進展。好玩的是那時傳說已有人找到方法, 不僅估計算子並且也能估計其方根。我們有些沮喪, 不久其中一位數學家到 Princeton 來, 我們問他, 他不肯告訴我們, 只說等 paper 登出來就知道了, 結果並沒有方根的估計, 過了很久我才恍然大悟, 也許他根本不知道如何估計方根, 他不確定自己在說什麼, 但他絕不肯承認自己不知道。大部分的人都不願意說「我不知道」。11 月 4 日, 這個日子對我有特殊意義, 當年我就是在這天離開匈牙利的, 那天, 我坐在高等研究所的研究室, 突然靈光一現, 想到 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, 完全解決了我們的問題。我打電話給 Stein:「Eli 有空嗎, 我有東西給你看。」我騎上自行車趕去他那裡。他聽完, 坐在那一晌, 然後高興得跳呀跳的。問題解決了, 但當然花了相當長的時間寫, 數年才完成。(Estimates for the $\overline{\partial}$-Neumann Problem) 從此我做的一直都是 $\overline{\partial}$- Neumann 問題, 我似乎體會到能在邊界解就足夠得出內部的解 (這裡的解需滿足某些估計), 多年來在這方面的工作也很自然的導向了許多其他的 (相關聯的) 東西, 舉例來說, 我們希望在邊界上對 ($\overline{\partial}$-Neumann) 算子做像 Laplace 算子般的估計, 但卻沒有足夠的方向, 怎麼辦呢, 基本上就要從最簡單的情形下手, 有點像如果你要知道 Laplace-Beltrami 算子在流形上的情形, 除非你了解 Laplace 算子在歐氏空間中的性質, 不然你不可能處理在流形上的

Laplace-Beltramin 算子。對 $\overline{\partial}$-Neumann 問題而言, 在某種程度上, 邊界問題最簡單的例子就是 Heisenberg group。大致說來相當於歐式空間之於 Laplace-Beltrami 算子, 所以我有許多關於 Heisenberg group 的工作, 人家認爲我專做 Heisenberg group, 但我這樣做只因爲這是了解問題必須的先備工作, 而且這些工作又導向許多不同的東西, 我曾與許多人討論, 大多數是做調和分析的, 像 Stein, Hörmander, 他們著眼在估計, 而我想了解得更確切些, 希望得到 (解的) 式子, 我知道這個用調和分析做不到, 所以最後我轉向幾何。幾何是非常非常重要的, 我想起一個古老的說法, 所有的數學, 不論幾何, 分析或代數, 如果它眞是好數學, 骨子裡一定是幾何, 某種意義上, 它們都能以幾何的形式呈現, 這是頗堪玩味的, 還有件有趣的事, 法國人通常以 géomètre 指偉大的數學家, 不管他做的是那類數學。

四. 對數學研究的看法

多年來總有人問我, 他是否可以走數學這條路, 要做些什麼, 等等, 我不知如何回答。沒有人能告訴別人你該做什麼, 做什麼都不容易, 有人說既然你做數學, 一定很喜歡它囉, 是的, 在某種意義上是如此, 但是數學是門難以想像的困難的學科, 如果要從事這行, 一定要耐得住痛苦與折磨, 因爲做數學沒有其它的方法, 如果你不能心甘情願接受這些磨練, 你就不能做數學, 這是一點, 讓我就這點再多說一些, 告訴別人該做什麼是非常困難的, 因爲數學有點像繪畫或寫作, 是源自於內在的, 一定要有股內在的動力驅使你埋頭去做, 否則做不來, 因爲它太難了。我認爲告訴年青人「數學很有趣, 只要你入了行, 就會發現它不難」是錯誤的, 因爲這不是事實。浸淫得愈久, 愈覺其難。我想起多年前一段故事, 是 Korányi 告訴我的, Korányi 大我七, 八歲, 我在 Princeton 當講師時他也在。Bochner 也是他的偶像, 但他從沒有機會和 Bochner 交談, 直到有一天他走在 Fine Hall, Bochner 正走出研究室突然叫住他 “Korányi, 最近你都在做些什麼?” Korányi 愣了一下, 偉大的 Bochner 竟然跟我說話, “哦, 我正嘗試推廣 (generalize)......” “啊! 還在推廣”, Bochner 搖搖手走開。我眞心以爲眞正有意思核心的數學主要是解決例子, 很難的例子的問題。也許你必須找到正確的例子, 由例子裡告訴你問題出在哪裡, 結構如何, 當然, 一旦掌握了結構, 其他人就會接著推廣這, 推廣那, 寫論文等等。年紀愈大, 愈覺得做數學眞正的困難處在於你必須了解問題的來源, 而這又在於找到些恰到好處的例子, 然後你必須徹底明確的了解這些例子。物理比較容易, 因爲有許多人從事實驗方面的工作, 實驗提供大量的數據, 其中許多你不知如何解讀, 於是理論物理學家登場了, 他們長時間參詳這些數據, 嘗試各種不同的方法, 也許經過多年思索最終找到一個與這些數據吻合的理論, 可以解釋原先的實驗。不幸地, 數學沒有這些, 沒有所謂的實驗。解決特定的好的例子在某種意義上也許可以算是做實驗。所以重點是數學家必須要解例子, 並且以一種幾何轉換不變的形式明確地了解例子。如此能看出其

結構, 然後許多類似東西的結構也都顯現了。因為不對例子做徹底的了解, 這樣的藝術有些目前已經流失了。Hörmander 就曾經說過「解特定的例子比討論一般的理論要難上許多」(李: 同感) 這句話並不過分。經過這麼多年以後, 我體會到許多我有興趣的問題說不定都可以在引進某些結構之後解決。這些都是非常明確的例子, 你必須動手計算。許多許多年以前, 當我還是 Yale 數學研究所一年級的學生, 年底時系裡為 E. Hille 教授退休舉行了盛大的聚會。(E. Hille 瑞典裔, 以 semigroup 見長, 當時大概60出頭) 他在會中演講自己的生平, 提到一位非常有名的的瑞典數學家 Von Koch, 他在 1900~1910 之間是第一個計算無窮維行列式的數學家。畢生從事一般性理論的 Hille 調侃他「以無窮的精力計算了一些無窮維行列式」語氣中不無輕蔑之意, 當時我不懂, 多年後由 Poincaré 及其他人的著作中我才知道他的工作的重要。無窮維的行列式很少, 我很想探討一些必須被計算出來的無窮維行列式, 事實上在探討 Heisenberg group 時就碰到一些無窮維行列式。當研究生時一般性的理論及結構對我而言還是很重要。即使在研究剛起步時, 我還是注重一般性, 我作些計算, 然後請別人幫我把結果寫成一般性的形式, 慢慢地, 我發覺自己不想再作那樣的事, 我有些想法, 我認為與幾何、微分方程的新觀點有關, 我希望能發掘出這些新觀點, 唯一的方法就是找到一些好例子, 這非常難, 找到了, 還需要計算它們了解它們。回顧過去30年, 大約每四, 五年我有些有意思的結果, 仍需再努力。

五. 對數學家的看法與針砭

李: 剛才不想打斷您的話, 現在我有幾個有關的問題, 您是否在共產黨體制下受過教育?

G: 是, 受中學教育, 五年級以後直到 18 歲離開匈牙利, 共七年。

李: 有何不同?

G: 有, 我只修了三年拉丁文, 我父親時是六年, 他之前是八年, 那時他們可以以拉丁語交談。還有我們不上微積分, 我父親那時高中要上微積分。我的微積分是 16 歲時當工程師的叔叔教我, 自修學的。所以我父親的那一代 (長我27歲) 的高中是比較難的。當然一切都在改變, 也許他們那一代高中少, 進高中的人也少, 可是我15 歲入高中時每個人都要唸高中, 其中有程度不好的學生, 但是它們也要畢業, 所以基本上課程的難度就持續下滑, 同樣的現象也出現在全球的大學教育。例如, 法國的大學一向很好, 有很高的水準, 直到密特朗時代, 宣稱要讓百分之八十的人受完大學教育, 不管他們是否有意願。現在法國大學程度低落無復往日。不過, 什麼是「好」? 你可以說現在的年輕人學到的東西沒有五十年前的年輕人多。但另一方面, 現在受教育的人口比五十年前多, 這是好事。整體來說, 我認為受教育人口增加這個事實是好事, 也應該這樣才對, 隨之而來的程度降低並不是那麼重要。因為某種程度來說, 頂尖的人才總會出頭。即使是放在五十年前。如此至少教育普及, 這對一般人及如今的

社會都是很緊要的。我唸中學時, 是在蘇聯體制下第一代的中學生, 我們開始唸俄文 (李: 必修?), 必修, 在那之前高中要修德文, 再加上英文或法文, 德文是第一外國語。這些語言都與拉丁文有部分相通之處, 除了俄文。不幸的是, 基本上教俄文的老師都是原先教授德文, 英文或法文的老師, 他們多半沒有俄文底子, 必須在短時間內學會俄文。雖然我學了六年俄文, 但我一直不會說, 不過因爲對語言的喜好, 我以閱讀自學。

李: 需要上什麼思想課如馬列思想嗎?

G: 中學不必。但大學每年必修馬克思主義。前面說過開學六星期, 我就離開匈牙利了, 所以我上的不多。當時中學不必修, 但以後如何我並不清楚。當然每本教科書都是蘇俄取向, 每樣東西都是俄國人發明的。盤尼西林是, 無線電也是, 到了一個地步讓我們這一代根本不相信俄國人說的話, 我們甚至不相信托爾斯泰是大文豪, 因爲他是俄國人, 直到很後來, 讀了他的作品才相信。不過我遇到到比我年輕的人, 也許小我25歲, 也就是相隔二、三代的中學生, 我有點驚訝他們竟然相信蘇聯那一套。

李: 請問您覺得匈牙利文化有那些特點得以產生這麼多偉大的數學家?

G: 好問題。我不確定我能回答。不過我知道不止是數學家, 匈牙利有世界各國比例最高的科學家。匈牙利一向重視科學, 比方說布達佩斯有個專爲數學優異學生設立的天才學校。(沈思) 我眞的不淸楚, 我猜想文化上的成就與大學教育對匈牙利文明是很重要的。我明顯的覺得, 匈牙利廿世紀上半要比後期產生的偉大科學家來得多。也許老的傳統文化眞的扮演了一個重要的角色, 就像德國在廿世紀前二十五到三十年間對科學的貢獻, 後來不能與之相比, 量子力學基本上是由德國發韌的。但經過戰爭的衝擊, 在匈牙利是蘇聯入侵, 在德國是二次大戰, 科學上的榮景不再, 像我就不認爲廿世紀後半有那些匈牙利數學家能與 Riesz, Féjer, 或物理學家能與 Eotvos 相提並論。他們仍然有有意義的研究, 也很出色, 但卻不是前述大家的等級。我不知如何解釋這現象, 也很好奇爲何如此。很奇怪的, 十八十九世紀出了許多不世出的偉大數學家, 廿世紀初有 Poincaré, Hilbert (他們基本上是十九世紀, 但在廿世紀初葉仍有貢獻), Hermann Weyl (他是我的偶像之一), 但是他們不及 Weierstrass, Gauss, Riemann, Jacobi, 不完全是他們的等級。然後到1950年以後, 即便是現今有名的數學家, 我覺得他們也不及 Porincaré, Hilbert, Weyl, 更遑論 Gauss, Riemann, Weierstrass。爲什麼會這樣呢? 我常獨坐燃一支雪茄, 喝杯咖啡思考這些問題。

我有個感覺, 如果你看這五十年來的數學家, 有名的, 得獎的, 仔細審視他們的工作, 發現他們的偉大在技巧, 是不可思議的巧匠。二三百年來數學發展累積了許多強有力的技術工具, 大概到了廿世紀中這些工具蓄積了強大的威力, 得以解決許多以往不能做的問題, 而過去五十年來, 數學家大部分致力於以這些強有力的技術工具去解決問題, 反而不見有新的想法、新的觀念的引入。那麼如何品評數學家的工作, 這個問題有點滑稽, 因爲每個人各

有偏好, 不過我們可以這樣來看, 你去看他的工作, 五年、十年、二十年, ... 是否仍然有意思, 牛頓的工作直到現在仍然有其意義, Jacobi 的工作, 許多 Gauss 做的和他開始的工作, Weierstrass 的工作, 這些到今天仍然有意思, 也許我的說法太嚴格, 但我想是正確的。還有一點, 我們說到幾何學家, 代數學家, 分析學家。幾何與代數學家在五十年代發展拓樸, 然後他們回到微分幾何 ..., 近二十年來代數幾何、複幾何、數論有很好的結果, 分析學家強烈的感覺他們沒有, 我深切的感覺大部份的分析學家, 近50年來愈來愈偏向於做一般性的理論, 不幸地他們也付出代價, 所得到的結果愈來愈不明確, 因爲對例子的了解不夠, 其中許多結構也因而不見了。我曾參加不少的研討會, 有個研討會上, 大家都在談 Non-linear Schrödinger Equation, 我問了許多人, 他們當中竟沒有人懂量子力學, 你不覺得奇怪嗎? 這表示他們並不了解做的是什麼, 從事的只是技巧上的工作。當然解決一個特定的問題 (solving a specific problem) 是極爲困難的事, 某種程度上也不能要求太多, 因爲年輕人要找工作、要升等、有出版論文的壓力, 已經有長聘 (tenure) 的人, 有申請補助的壓力, 也需要出版論文, 都不能冒險做難題, 因此大家只做他能做的, 而不是做他該做的題目。

李: 可否請您更明確的說明何謂解數學問題 (solving problems) ? 曾聽您說估計、存在性等論述並沒有眞正解決問題。

G: 哦, 分析學家沒有給出明確的解, 但代數幾何學家仍然解決問題, 給出實際的解, 像 Wiles 的 paper 中就需要解決許多新的問題。舉例來說, 好些本關於 sub-Riemannian geometry 的書, 從頭到尾竟沒有以例子驗證, 以至於經過了許多年, 都沒有發現 sub-Riemannian 球是奇異的 (singular), 後來總算探討了 Heisenberg group, 這確是 sub-Riemannian geometry 的一個例子, 我也是從這個例子著手, 但這個例子沒有代表性, 單從這個例子去做推論, 很多方面是會誤導的。(「黃」進來)

1977 年 B. Gaveau 發表他的學位論文, 其中他計算了 Heisenberg group 上的 geodesics, 發現存在任意靠近的兩點, 它們之間可有無窮多的 geodesics 連接。他的指導教授, 有名的 P. Malliavin 起先不相信,「這不可能是對的」, 最終 Gaveau 說服了他。許多許多年後一位有名的數學家在他的書上仍舊提到 Heisenberg group 上任意兩點有惟一的 geodesic 連接它們。雖然他很快更正了, 但這意味著當有些東西太廣泛, 又太難, 人們只談而不動手。19世紀數學家是從計算明確的例子開始, Riemannian Geometry 發展的時候, 人們做了多少工作, 計算 metrics、volume elements、距離 (distances), geodesics 是什麼樣子, 鄰域是什麼樣子, 邊界又是什麼樣子, 同樣的對於 sub-Riemannian geometry, 也應該從例子出發做同樣的分析, 又如在 Korányi 球上將 $\overline{\partial}_b$ 的解明確的寫出來, 雖然難, 但總得有人做這些工作, 計算明確的例子應該是最重要的基本工作。前面我提到 19 世紀, 20世紀前半, 後半的數學家們, 後不及前, 似乎距離造成偉大感有厚古薄今之嫌, 我也想過這個問題,

但我覺得並非如此, 我們所仰慕的當代數學家多以技巧取勝, 少見新觀念新想法的引入, (問「黃」) 你覺得怎樣?

黃: 記得多年前 MIT 的 D. Strook 來台時曾談到機率中, 研究像 central limit theorem 這一類的 invariance theorems 時, 最難的是對 random walks 的探討, 其後推廣到 infinite dimensional space 或 Brownian motion 皆是其餘事。

G: 是, 計算基本的例子是最難的。

黃: 當初做研究生時, 老師就訓練我們由做例子著手, 記得有位老師說數學就是一堆有意思的好例子, 一個大定理若沒有例子就好比只有骨頭沒有肉。

G: 正是, 數學正是一堆有意思的好的例子, 其他的都是盤飾 (garnish)。(Exactly, a bunch of interesting, good examples that is mathematics, everything else is garnish.)

李: 我想我們就此結束, 謝謝您接受我們的訪談。

G: 謝謝你們讓我暢所欲言。

—本文訪問者李宣北、黃啓瑞任職於中央研究院數學所—