關於三角形內角平分線長的幾何性質

丁遵標

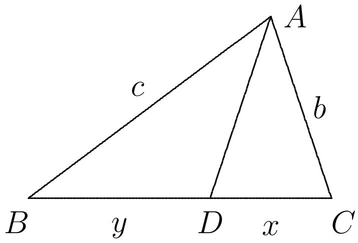
摘要: 本文獲得了三角形內角平分線長的幾個有趣幾何性質。

關鍵詞: 三角形、內角平分線長、半周長、外接圓半徑、內切圓半徑。

本文約定: $\triangle ABC$ 的三邊長、半周長、面積、外接圓半徑、內切圓半徑及 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的角平分線長分別爲 a、b、c、S、$\triangle$、R、r、t_a、t_b、t_c

定理 1: $\frac{bc}{t_a^2}+\frac{ca}{t_b^2}+\frac{ab}{t_c^2}=\frac{R}{r}+2$ 爲證明此定理, 請先看下面的引理:

引理: 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 $\angle BAC$ 的平分線, 則有: $t_a^2=\frac{4bcS(S-a)}{(b+c)^2}$



證明: 設 $CD=x$, $BD=y$, 由三角形角平分線性質知:

$$b:c=x:y$$

又 $\because x+y=a \therefore x=\frac{ab}{b+c}$, $y=\frac{ac}{b+c}$

由 Stewart's Theorem 知

$$AB^2\cdot DC+AC^2\cdot BD-AD^2\cdot BC=BC\cdot BD\cdot DC$$

讀者可通過網站: http://www.icl.pku.cn/yujs/Mathworld/math/s/s741.htm 了解 Stewart's Theorem 的證明過程。

即 $c^2x+b^2y-at_a^2=axy$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad t_a^2 &= \frac{c^2x+b^2y-axy}{a}\\
&= \frac{c^2\cdot\frac{ab}{b+c}+b^2\cdot\frac{ac}{b+c}-a\cdot\frac{a^2bc}{(b+c)^2}}{a}\\
&= \frac{abc[c(b+c)+b(b+c)-a^2]}{a(b+c)^2}\\
&= \frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}\\
&= \frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}\\
&= \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}\\
\text{故}\quad t_a^2 &= \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}
\end{aligned}$$

下面, 我們進一步來證明定理1。

證明: 由引理知

$$\begin{aligned}
t_a^2 &= \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}=\frac{4bcs(s-a)}{(2s-a)^2}\\
\therefore\quad \frac{bc}{t_a^2} &= \frac{(2s-a)^2}{4s(s-a)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s-a}+\frac{1}{2}+\frac{s-a}{4s}
\end{aligned}$$

同理: $\frac{ca}{t_b^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s-b}+\frac{1}{2}+\frac{s-b}{4s}$

$\frac{ab}{t_c^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s-c}+\frac{1}{2}+\frac{s-c}{4s}$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad \frac{bc}{t_a^2}+\frac{ca}{t_b^2}+\frac{ab}{t_c^2} &= \frac{s}{4}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)+\frac{3}{2}+\frac{3s-a-b-c}{4s}\\
&= \frac{s}{4}\left(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\right)+\frac{7}{4} \qquad (1)
\end{aligned}$$

$\therefore\quad \triangle=\frac{1}{2}(a+b+c)r=rs$

再由海倫公式 $\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 便可得到 $(s-a)(s-b)(s-c)=r^2s$,

又 $\because abc=4Rrs$, $\quad\therefore\quad abc+(s-a)(s-b)(s-c)=4Rrs+r^2s$

$$\begin{aligned}
\because\quad abc+(s-a)(s-b)(s-c) &= abc+[s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-abc]\\
&= s^3-2s^3+(ab+bc+ca)s\\
&= (ab+bc+ca)s-s^3=4Rrs+r^2s
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad ab+bc+ca=s^2+4Rr+r^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}=\frac{ab+bc+ca-s^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$=\frac{s^2+4Rr+r^2-s^2}{r^2 s}=\frac{4R+r}{rs} \tag{2}$$

由 (1)、(2) 得

$$\frac{bc}{t_a^2}+\frac{ca}{t_b^2}+\frac{ab}{t_c^2}=\frac{R}{r}+2$$

下面, 我們對此性質作進一步的探討。

由 Euler 不等式 $R\geq 2r$, 便可得到:

推論1: $\frac{bc}{t_a^2}+\frac{ca}{t_b^2}+\frac{ab}{t_c^2}\geq 4$

若且為若 $\triangle ABC$ 是正三角形時, 取等號。

又 $\because \quad abc=4R\triangle=4Rrs$

$$\text{且} \quad \frac{bc}{t_a^2}+\frac{ca}{t_b^2}+\frac{ab}{t_c^2}\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{abc}{t_at_bt_c}\right)^2}$$

(算術平均 $\geq$ 幾何平均)

再由定理1知

$$\frac{R}{r}+2\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{abc}{t_at_bt_c}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{R+2r}{3r}\right)^{\frac{3}{2}}\geq \frac{abc}{t_at_bt_c}$$

$$\therefore \quad t_at_bt_c\geq abc\left(\frac{3r}{R+2r}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$=4Rrs\left(\frac{3r}{R+2r}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$\geq 4Rrs\left(\frac{3r}{2R}\right)^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{3r^2s\sqrt{6Rr}}{R}$$

於是, 我們又可得到:

推論2: $t_at_bt_c\geq \frac{3r^2s\sqrt{6Rr}}{R}$

定理2: $\frac{1}{t_a^2}+\frac{1}{t_b^2}+\frac{1}{t_c^2}=\frac{2R+r}{8Rr^2}+\frac{4R+r}{8Rs^2}$

證明: $\because \frac{bc}{t_a^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{s-a}+\frac{1}{2}+\frac{s-a}{4s}$

$$\therefore \quad \frac{1}{t_a^2}=\frac{1}{4bc}\left(\frac{s}{s-a}+2+\frac{s-a}{s}\right)$$

$$=\frac{s}{4bc(s-a)}+\frac{3}{4bc}-\frac{a^2}{4abcs}$$

同理

$$\frac{1}{t_b^2}=\frac{s}{4ca(s-b)}+\frac{3}{4ca}-\frac{b^2}{4abcs}$$

$$\frac{1}{t_c^2}=\frac{s}{4ab(s-c)}+\frac{3}{4ab}-\frac{c^2}{4abcs}$$

又 $\because \quad a^2+b^2+c^2=2(s^2-4Rr-r^2)$

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{2Rr}$$

$$\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}=\frac{4R+r}{rs}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{t_a^2}+\frac{1}{t_b^2}+\frac{1}{t_c^2}$$

$$=\frac{s}{4abc}\left(\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)-\frac{a^2+b^2+c^2}{4abcs}$$

$$=\frac{s}{4abc}\left[s\Big(\frac{1}{s-a}+\frac{1}{s-b}+\frac{1}{s-c}\Big)-3\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)-\frac{a^2+b^2+c^2}{4abcs}$$

$$=\frac{s}{4\cdot 4Rrs}\left(s\cdot\frac{4R+r}{rs}-3\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2Rr}-\frac{2(s^2-4Rr-r^2)}{4\cdot 4Rrs\cdot s}$$

$$=\frac{2R+r}{8Rr^2}+\frac{4R+r}{8Rs^2}$$

故: $\frac{1}{t_a^2}+\frac{1}{t_b^2}+\frac{1}{t_c^2}=\frac{2R+r}{8Rr^2}+\frac{4R+r}{8Rs^2}$

下面, 我們對此性質再作進一步的探討。

由 Gerretsen 不等式知,

$$s^2\geq 16Rr-5r^2$$

$$\therefore \quad \frac{2R+r}{8Rr^2}+\frac{4R+r}{8Rs^2}\leq\frac{2R+r}{8Rr^2}+\frac{4R+r}{8R(16Rr-5r^2)}$$

$$\leq\frac{2R+\frac{R}{2}}{8Rr^2}+\frac{4R+\frac{R}{2}}{8R(16r\cdot 2r-5r^2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{5}{16r^2} + \frac{1}{48r^2} \\
&= \frac{1}{3r^2}
\end{aligned}
$$

這時, 便可得到

推論3: $\frac{1}{t_a^2} + \frac{1}{t_b^2} + \frac{1}{t_c^2} \leq \frac{1}{3r^2}$

若且爲若 $\triangle ABC$ 是正三角形時, 取等號。

$$
\begin{aligned}
\text{由於}\quad & (t_a^2+t_b^2+t_c^2)\Big(\frac{1}{t_a^2}+\frac{1}{t_b^2}+\frac{1}{t_c^2}\Big) \\
& \geq 3\sqrt[3]{t_a^2t_b^2t_c^2}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{t_a^2}\frac{1}{t_b^2}\frac{1}{t_c^2}} \qquad (\text{算術平均} \geq \text{幾何平均}) \\
& = 9 \\
\text{所以}\quad & (t_a^2+t_b^2+t_c^2)\Big(\frac{1}{t_a^2}+\frac{1}{t_b^2}+\frac{1}{t_c^2}\Big) \geq 9
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad t_a^2+t_b^2+t_c^2 \geq \frac{9}{\frac{1}{t_a^2}+\frac{1}{t_b^2}+\frac{1}{t_c^2}} \geq \frac{9}{\frac{1}{3r^2}} = 27r^2
$$

這時, 我們又得到:

推論4: $t_a^2+t_b^2+t_c^2 \geq 27r^2$

若且爲若 $\triangle ABC$ 是正三角形時, 取等號。

參考文獻

1. O. Bottema 等著, 單墫譯。幾何不等式, 北京大學出版社, 1991。
2. 丁遵標, 與三角形高有關的幾何性質, 本刊待發。

—本文作者任教於中國安徽省舒城縣杭埠中學—