實數系的建構

王九逵

1. 實數的定義

古希臘人只用有理數, 但在歐氏幾何原本中記載有正方形的對角線和其一邊的比不可能用有理數表示。爲此, Eudoxus of Knidus (c. 400 B. C.—350 B.C.) 發明了一套幾何量的比例的理論, 而這理論便是 J. W. R. Dedekind (1831–1916) 的實數論的濫觴。

茲略述 Eudoxus 的理論如下: 設 a, b, c, d 爲四線段。若對任意二正整數 m, n,

$$ma > nb \quad \text{和} \quad mc > nd \quad \text{同時成立,}$$
$$ma < nb \quad \text{和} \quad mc < nd \quad \text{同時成立,}$$

我們便說 a, b, c, d 四線段成比例, 並以符號

$$a : b = c : d$$

表之。四個幾何量 ma, nb, mc 和 nd 都可由幾何作圖的方式作出。用現代的語言來講, 這些不等式的意義是: a/b 和 c/d 代表相同的實數的充要條件是有理數 n/m 大於其一時必大於另一, 小於其一時必亦小於另一。

Dedekind 依據 Eudoxus 的理論建立了他以分割表實數的理論 。他假想實數均爲一條水平直線上的點的座標。如果我們把所有的無理數移除, 直線上便出現很多漏洞。每個漏洞均把直線上的點分割爲二類, 一類是漏洞左邊的有理點, 另一類是它右邊的有理點。漏洞處所移走的實數可由這有理點的這種分割完全決定。

和 Dedekind 幾乎同時, Georg Cantor (1845–1918) 也提出了另一套實數理論。他注意到每個實數都可以看成收斂的有理數列的極限。在沒有無理數的條件下, 收斂於無理數的數列雖然沒有極限, 但仍能滿足 Cauchy 的驗斂條件。Cantor 定義的實數便建立在如何爲每個滿足 Cauchy 的驗斂條件的有理數列賦予一個極限。

在本文中, 我們將使用一個新方法, 把 Dedekind 和 Cantor 的理論混合起來。我們的基本概念將是有理數的有界增系列。在實數系中每個有界增系列都有一個上確界, 但在有理數系中則不然。但另一方面每個實數卻都可以想成一個有理數的有界增系列的上確界。這便是我們建構的基礎。以下我們把此建構詳加論述。

因此以下我們假定讀者尚不知實數爲何物, 但對有理數系 $\mathbb{Q}$ 卻知之甚詳。每個有理數都可以表成兩個整數的商, 而其間依通常方法定義著四則運算與大小的比較。從正整數的集合到 $\mathbb{Q}$ 的映像叫做一個 *有理數列* (rational sequence)。因爲目前我們假定所有的數都是有理數, 所以以下我們把有理數列簡稱爲 *數列*。若在一個有理數列中和正整數 n 對應的有理數爲 x_n, 我們就用 $\{x_n\}$ 表示這數列。x_n 叫這數列的第 n 項。若數列 $\{x_n\}$ 中對一切正整數 n 恆有 $x_n \leq x_{n+1}$, 則 $\{x_n\}$ 稱爲 *增* (increasing) 數列。仿此若對一切正整數 n 恆有 $x_n \geq x_{n+1}$, 則 $\{x_n\}$ 稱爲 *減* (decreasing) 數列。

設 X 爲有理數的集合。若有一有理數M使$x \leq M$對一切$x \in X$均成立, 則稱集合 X *有上界* (bounded above), 而 M 叫 X 的一個 *上界* (upper bound)。若 X 有上界, 而在 X 的上界中有一個最小的元素, 則這個最小的上界叫 X 的 *上確界* (supremum)。仿此, 若有一有理數 m 使 $x \geq m$ 對一切 $x \in X$ 均成立, 則稱集合 X *有下界* (bounded below), 而m叫X的一個*下界* (lower bound)。若 X 有下界, 而在 X 的下界中有一個最大的元素, 則這個最大的下界叫 X 的 *下確界* (infimum)。既有上界又有下界的集合叫*有界* (bounded) 集合。設 $\{x_n\}$ 爲一數列, X 爲該系列各項所形成的集合。若 X 有上界、有下界或有界, 我們也說$\{x_n\}$有上界、有下界或有界。X的上界、下界、上確界和下確界也叫 $\{x_n\}$ 的上界、下界、上確界和下確界。在不造成混淆的情況下, 我們有時用 X 表示數列 $\{x_n\}$。

以下我們將用 $\mathcal{B}$ 表示所有有界增有理數列的集合。在 $\mathcal{B}$ 中我們引入關係 $\prec$如次: 令 X, Y 爲 $\mathcal{B}$ 中的二元素。若 Y 的每個上界也是 X 的上界, 我們便說 $X \prec Y$。很容易看出關係 $\prec$ 具有下列二性質:

$$X \prec X; \qquad X \prec Y,\ Y \prec Z \Rightarrow X \prec Z.$$

若 $X = \{x_n\}$, $Y = \{y_n\} \in \mathcal{B}$, 則 $X \prec Y$ 和 $Y \prec X$ 二者之一必成立。事實上如果不然, 則從 $X \not\prec Y$ 知有一有理數 u 使 $y_n \leq u$ 對所有的 n 都成立, 但有一正整數 m 使 $u < x_m$。同理從 $Y \not\prec X$ 知有一有理數 v 使 $x_n \leq v$ 對所有的 n 都成立, 但有一正整數 l 使 $v < y_l$。但如此則有

$$v < y_l \leq u < x_m \leq v.$$

這是矛盾。

設$X, Y \in \mathcal{B}$。若 $X \prec Y$ 與 $Y \prec X$ 同時成立, 我們用符號 $X \sim Y$ 表之。$\sim$ 滿足下列三條件:

$$X \sim X; \qquad X \sim Y \Rightarrow Y \sim X; \qquad X \sim Y,\ Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z.$$

換言之, $\sim$ 是一個 *同值關係* (equivalence relation)。

在這個同值關係之下的 *同值類* (equivalence class) 便叫做 *實數* (real number)。我們用 $\mathbb{R}$ 代表所有實數的集合。換言之, 一個有界增有理數列以及一切和它同值的有理數列便叫一個實數。當你最初看到這實數的定義時, 相信你會覺得非常不適應, 甚至困惑。但是, 到現在爲止, 我們本來還沒有實數; 我們要以有理數爲素材把實數建構出來。其實我們並不在乎造成實數的質料爲何。只要造出的實數夠多, 而且在實數間能定義我們所需要的運算與次序, 使所有有關實數的公理都能滿足, 我們就滿意了。以下我們將用希臘字母表示實數, 即 $\mathbb{R}$ 的元素。若有理數列 X 在同值類 (或實數) ξ 中, 我們便說 X 代表 ξ。

若 $X^{(1)} \sim X^{(2)}$, $Y^{(1)} \sim Y^{(2)}$ 且 $X^{(1)} \prec Y^{(1)}$, 則亦有 $X^{(2)} \prec Y^{(2)}$。令 ξ 與 η 分別爲包含 $X^{(1)}$ 與 $Y^{(1)}$ 的實數。當此事成立時我們便說 $\xi \leq \eta$。這關係 $\leq$ 不會引起歧義, 而且滿足下列諸條件:

O1. $\xi \leq \xi$,

O2. $\xi \leq \eta,\ \eta \leq \xi \Rightarrow \xi = \eta$,

O3. $\xi \leq \eta,\ \eta \leq \zeta \Rightarrow \xi \leq \zeta$。

我們稱滿足條件 O1 – O3 的關係 $\leq$ 爲一個 *全序* (total order)。關係 $\xi \leq \eta$ 也可以寫作 $\eta \geq \xi$。我們也使用符號 $\xi < \eta$ 和 $\eta > \xi$ 來表示 $\xi \leq \eta$ 但 $\xi \neq \eta$。

設x爲有理數。每項都等於 x 的有理數列 X 定義了一個實數 ξ。我們稱 ξ 爲 *有理實數* (rational real number) x。我們把ξ和x等同; 這樣我們便把有理數嵌入實數中了。不和有理數等同的實數叫*無理數* (irrational number)。設x和y爲有理數 。很顯然把它們看作實數時 $x \leq y$ 成立的充要條件是把它們看成有理數時 $x \leq y$ 也成立。

下定理說明有理實數在所有實數中稠密:

定理 1. 令 $\xi,\ \eta \in \mathbb{R}$。若 $\xi < \eta$, 則有一有理數 z 使 $\xi < z < \eta$。

證: 令數列 $X = \{x_n\}$ 與 $Y = \{y_n\}$ 分別代表實數 ξ 與 η。因 $\xi < \eta$, 所以有一個有理數 z_1 是 X 的上界, 而不是 Y 的上界。因此 Y 中有一項 y_n 滿足 $z_1 < y_n$。於是有理數 $z = \frac{1}{2}(z_1 + y_n)$ 便滿足了不等式 $\xi < z < \eta$。

在實數間引入了全序以後, 實數的增數列、減數列、實數集合的上界、下界、上確界、下確界等觀念便都有了著落。我不想在此重複這些定義。以後所談的數列悉指實數的數列而言。

定理2. 任意實數的有界增數列均有上確界。

證: 令 $\{\xi_n\}$ 爲實數的增數列。如果這數列從某項起以後各項的值都相同, 那麼這共同的值便是所求的上確界。否則把重複的各項省略, 我們可以假定 $\xi_n < \xi_{n+1}$ 對一切 n 均成立。於是對每個正整數 n, 選擇一有理數 x_n 使 $\xi_n < x_n < \xi_{n+1}$。很顯然有理數列$X = \{x_n\}$ 爲增數列。若Ξ 爲實數列 $\{\xi_n\}$ 的上界, 則在 Ξ 和 $\Xi + 1$ 間任意選出的有理數都是 X 的上界。所以 $x \in \mathcal{B}$。令 ξ 爲由 X 所定義的實數。讀者不難驗證 ξ 便是實數列 $\{\xi_n\}$ 的上確界。

令 $\{\xi_n\}$ 爲實數列, λ 爲一實數。若對任意正實數 ϵ 都有一正整數 N 存在, 使當 $n > N$ 時恆有 $|\xi_n - \lambda| < \epsilon$, 我們便說 λ 是數列 $\{\xi_n\}$ 的 *極限* (limit)。有極限的數列叫做 *收斂* (convergent) 數列。不難證明收斂數列均有界, 且其極限是唯一的。另一方面, 有界的增數列以其上確界爲極限。因此我們得到了

系3. 有界增數列均收斂。

2. 實數的四則運算

本節的目標是解釋如何在實數間做算術計算。

設 ξ 和 η 爲二實數, 有理數列 $X = \{x_n\}$ 和 $Y = \{y_n\}$ 分別是它們的代表。令 M 爲 X 的一個上界, N 爲 Y 的一個上界。則有理數列 $\{x_n + y_n\}$ 爲增數列, 以 $M + N$ 爲上界。它所定義的實數 σ 叫做 ξ 和 η 的 *和* (sum), 寫作 $\sigma = \xi + \eta$。很容易驗證這和 σ 的定義和 ξ 與 η 的代表 X 和 Y 的選擇無關。計算和的算術運算叫*加法* (addition)。

加法滿足下列各定律, 其中 $\xi, \eta, \zeta, \theta \in \mathbb{R}$:

A1. *交換律* (The commutative law)。$\xi + \eta = \eta + \xi$。
A2. *結合律* (The associative law)。$(\xi + \eta) + \zeta = \xi + (\eta + \zeta)$。
A3. *零元素* (Zero element)。有理實數 0 滿足 $0 + \xi = \xi$。
A4。*負元素* (Negative element)。對任意 $\xi \in \mathbb{R}$ 均有元素 $\eta \in \mathbb{R}$ 使 $\xi + \eta = 0$。

證: 令 $X = \{x_n\}$ 爲一代表 ξ 的有理數列。令 $v_1 = x_1$, 再令 u_1 爲 X 的一個上界。用數學歸納法定義有理數列 $\{v_n\}$ 及 $\{u_n\}$ 如次: 當已定義 u_n 及 v_n, 使 u_n 爲 X 的上界, v_n 爲 X 的一項以後, 設 $m = \frac{1}{2}(v_n + u_n)$。若 m 爲 X 的上界, 則令 $u_{n+1} = m$, v_{n+1} 爲 X 中 v_n 的下一項, 否則 令 $u_{n+1} = u_n$, v_{n+1} 爲 X 的諸項中 $> m$ 的第一項。有理數列 $V = \{v_n\}$ 爲 X 的子數列, 所以和 X 定義同一個實數 ξ。令 $Y = \{-u_n\}$。則 Y 爲增數列, 以 $-v_1$ 爲上界, 所以它定義了一個實數 η。因 $u_n - v_n \leq (u_1 - v_1)/2^{n-1}$, 故知 $\xi + \eta = 0$。

我們通常用 $-\xi$ 表示實數 η。

若 ξ_1 與 ξ_2 爲二實數, 則 $\xi_1+(-\xi_2)$ 叫 ξ_1 與 ξ_2 的 差 (difference), 以 $\xi_1-\xi_2$ 表之。

A5。全序的保持 (Order preservation)。若 $\xi>\eta$, $\zeta>\theta$, 則 $\xi+\eta>\zeta+\theta$。

以下我們定義實數的乘法 (multiplication)。設 $\xi,\eta\in\mathbb{R}$。我們想要定義它們的積 (product) $\xi\eta$。下文中我們將就 $\xi>0$, $\eta>0$ 的情形定義這積。其餘的情形可以按以下的法則處理:

若 $\xi=0$ 或 $\eta=0$ 則令 $\xi\eta=0$。
若 $\xi<0$ 且 $\eta>0$ 則令 $\xi\eta=-[(-\xi)\eta]$。
若 $\xi>0$ 且 $\eta<0$ 則令 $\xi\eta=-[\xi(-\eta)]$。
若 $\xi<0$ 且 $\eta<0$ 則令 $\xi\eta=(-\xi)(-\eta)$。

現在回到 $\xi>0$ 且 $\eta>0$ 的情形。選定有理數列 $X=\{x_n\}$ 和 $Y=\{y_n\}$, 使其分別代表 ξ 和 η。不失一般性可假定 $x_n\geq 0$, $y_n\geq 0$ 對每個 n 都成立。選取 X 的一個上界 M 與Y 的一個上界 N。則有理數列 $\{x_ny_n\}$ 爲增數列, 以 MN 爲上界。由這有理數列所定義的實數 ϖ 叫做 ξ 和 η 的積 (product), 寫做 $\varpi=\xi\eta$。和加法時一樣, 很容易驗證這積的定義與 X 和 Y 的選擇無關。關於積, 我們有以下的定律:

M1. 交換律 (The commutative law)。$\xi\eta=\eta\xi$。
M2. 結合律 (The associative law)。$(\xi\eta)\zeta=\xi(\eta\zeta)$。
M3. 分配律 (The distributive law)。$\xi(\eta+\zeta)=\xi\eta+\xi\zeta$。
M4. 單元 (Unit element)。有理實數 1 滿足 $1\cdot\xi=\xi$。
M5. 倒數 (Reciprocal)。若實數 $\xi\neq 0$, 則有一實數 η 存在, 使 $\xi\eta=1$。

證: 以下僅就 $\xi>0$ 的情形立論。令$X=\{x_n\}$ 爲代表 ξ 的正項有理數列和 $-\xi$ 的存在的證明一樣, 建構有理數列 $\{u_n\}$ 與 $\{v_n\}$, 使 $V=\{v_n\}$ 爲 X 的子數列 , $\{u_n\}$ 爲由 V 的上界形成的減數列, 滿足 $u_n-v_n<(u_1-v_1)/2^{n-1}$。令 $y_n=1/u_n$。則數列 $Y=\{y_n\}$ 是以 $1/v_1$ 爲上界的增數列。令其所定義的實數爲 η。茲因

$$1-v_ny_n=\frac{u_n-v_n}{u_n},$$

故得

$$0<1-u_ny_n<\frac{1}{2^{n-1}}(u_1-v_1).$$

所以得到了 $\xi\eta=1$。

本條中的η通常用$1/\xi$表示, 稱爲ξ的倒數。

若ξ_1和ξ_2 爲二實數, 其中$\xi_2\neq 0$, 則 $\xi_1(1/\xi_2)$ 叫 ξ_1 除以 ξ_2 的商 (quotient), 以 ξ_1/ξ_2 表之。

M6. 全序的保持 (Order preservation)。若 $\xi > \eta$, $\zeta > 0$, 則 $\xi\zeta > \eta\zeta$。

3. 完備性

以下我們推廣定理2爲下述結果:

定理4. 任意有上界的非空實數集合都有一個上確界。

證: 令 S 爲一有上界的非空實數集合。因 $S \neq \emptyset$, 故可任選 $\xi_1 \in S$。又因 S 有上界, 令 η_1 爲 S 的一個上界。設 $\mu = \frac{1}{2}(\xi_1 + \eta_1)$。若 μ 爲 S 的上界, 則令 $\eta_2 = \mu$, $\xi_2 = \xi_1$, 否則令 $\eta_2 = \eta_1$, 而選取 $\xi_2 \in S$, 使 $\xi_2 > \mu$。則 $\xi_1 \leq \xi_2 < \eta_2 \leq \eta_1$ 並且 $\eta_2 - x_2 \leq \frac{1}{2}(\eta_1 - \xi_1)$。重複這手續, 便可得到實數的增數列 $X = \{\xi_n\} \subset S$ 及由S的上界所形成的減數列 $\{\eta_n\}$。由定理2得知 $\sigma = \sup X$ 存在, 且具有下列二性質:

(1) 任意小於 σ 的實數均爲 S 中的一元素所超過。
(2) 任意大於 σ 的實數均爲 S 的上界。

這兩個條件表示 $\sup S = \sigma = \sup X$。

本定理所述實數的性質, 通常稱爲實數的*完備性公理* (Axiom of Completeness)。

系5. 任意有下界的非空實數集合S都有一個下確界。

證: 令 $T = \{-x : x \in S\}$。則 T 不空而且有上界。從上定理知 T 有上確 界t。則 $-t$ 便是我們所找的集合 S 的下確界。

在代數學裡的體 (field, 中文的體字譯自德文的 Körper 或法文的 corps) 是指一個集合, 在其中定義著加法和乘法兩個運算, 使條件 A1–A4 和 M1–M5 得以滿足。在一集合上的全序是指一個滿足條件 O1–O3 的關係。若在一個體上定義著一個全序, 使條件 A5 和 M6 得以滿足, 那麼這體便叫一個*賦序體* (ordered field)。從以上的討論知實數便形成一個滿足完備性公理的賦序體。

設 F 和 G 爲兩個賦序體。從 F 到 G 的*保序同構* (order isomorphism) 是指滿足以下諸條件的一一對應 ϕ: 對任二元素 $\xi, \eta \in F$ 均有

I1. $\phi(\xi + \eta) = \phi(\xi) + \phi(\eta)$,
I2. $\phi(\xi\eta) = \phi(\xi)\phi(\eta)$,
I3. $\phi(\xi) \leq \phi(\eta)$ 的充要條件爲 $\xi \leq \eta$。

當我們只考慮代數性質時, 如果兩個賦序體間有一個保序同構存在, 那麼這兩個賦序體的代數性質完全相同, 難以分辨。兩個體其實就像是同一個體穿了不同的外衣而已。在本節中我們

將證明: 如果我們不把有保序同構的賦序體加以區分, 則實數體 $\mathbb{R}$ 是唯一滿足完備性公理的賦序體。

定理 6. 設 F 爲滿足完備性公理的賦序體。則必有 F 和實數體 $\mathbb{R}$ 間的保序同構存在。

證: 我們逐步定對對應 $\phi : \mathbb{R} \to F$ 如次: 首先令 $\phi(0) = 0$。其次若 ξ 爲正整數, 則令

$$\phi(\xi) = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{共 } \xi \text{ 項}},$$

式中右邊的 1 是 F 中的單元。若 ξ 爲負整數, 則令 $\phi(\xi) = -\phi(-\xi)$。若 $\xi = m/n$ 爲有理數, 其中 m 和 n 爲整數, 則令 $\phi(\xi) = \phi(m)/\phi(n)$。不難驗證這定義和$m$ 和 n 的選擇無關, 而使 ϕ 形成有理數體 $\mathbb{Q}$ 和 F 的子體 $\phi(\mathbb{Q})$ 間的保序同構。

以下證明集合 $N = \{\phi(n) : n \text{ 爲正整數}\}$ 沒有上界。假定不然, 它一定會有上確界 μ。但若如此, 則 $\mu - 1$ 必被 N 的某一元素 $\phi(n)$ 所超過; 從而 μ 便會被 $\phi(n+1) \in N$ 所超過。這是矛盾。

以下我們從這結果推出 F 的子體 $\phi(\mathbb{Q})$ 在 F 中稠密: 令 $x < y$ 爲 F 的二元素。選定一正整數 n 使 $\phi(n) > 1/(y - x)$, 再選一整數 m 使 $\phi(m/n) < x$。在有限序列

$$\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}, \ldots$$

中選出滿足不等式 $\phi(k/n) > x$ 的第一個元素 k/n。則 $\phi(k/n)$ 爲在 x 和 y 之間的 $\phi(\mathbb{Q})$ 的元素。

現設 ξ 爲無理數。則必有增有理數列 $\{x_n\}$ 使 $\sup\{x_n\} = \xi$。於是 F 的元素 $\phi(x_n)$ 所形成的系列在 F 中增加並且有上界, 所以它有一個上確界。我們令這個上確界爲 $\phi(\xi)$。這樣 ϕ 的定義域便已推廣到整條實數線 $\mathbb{R}$ 上了。不難證明這推廣後的 ϕ 保持全序和算術運算。因 $\phi(\mathbb{Q})$ 在 F 中稠密, 所以 ϕ 把 $\mathbb{R}$ 映成 F。

4. Cantor 的理論

G. Cantor 建立了建構實數的另一個方法。在介紹 Cantor 的理論以前, 讓我們先證明實數系的兩個性質, 即 Bolzano-Weierstrass 定理 和 Cauchy 驗斂條件:

定理 7. (Bolzano-Weierstrass) 每個有界數列都有一收斂的子數列。

證: 令 $\{s_m\}$ 爲有界數列。則有常數 a 和 b, 使 $a < s_m < b$ 對一切 $m = 1, 2, \ldots$ 均成立。令 $M = b - a$。我們將建構兩個數列 $\{a_k\}$ 和 $\{b_k\}$ 使下列三條件得以滿足:

(i) $a_{k-1} \leq a_k$, $b_{k-1} \geq b_k$, $\qquad k = 2, 3, \ldots$。
(ii) $b_k - a_k = M \cdot 2^{1-k}$, $\qquad k = 1, 2, 3, \ldots$。
(iii) $[a_k, b_k]$ 包含 $\{s_m\}$ 的無限多項, $\qquad k = 1, 2, 3, \ldots$。

爲了達到這個目的, 先選 $a_1 = a$, $b_1 = b$。假定我們已經選好了 $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$, 使 (i), (ii), (iii) 對每個 $k \leq n$ 均成立。若間隔 $[\frac{1}{2}(a_n + b_n), b_n]$ 包含 $\{s_m\}$ 的無限多項, 則令 $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$, $b_{n+1} = b_n$; 否則令 $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$。在兩種情形之下,(i), (ii) 和 (iii) 對 $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ 及 $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ 均仍成立。反複使用這手續, 我們便得到滿足條件 (i), (ii), (iii) 的兩個數列 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$。因 $\{a_k\}$ 爲有界增數列, 它的極限 l 存在。又因 $[a_k, b_k]$ 中包含 $\{s_m\}$ 的無限多項, 對於每個 k 我們可以選取 s_{n_k} 使

$$s_{n_k} \in [a_k, b_k], \qquad \text{和} \qquad n_{k+1} > n_k \qquad k = 1, 2, \ldots.$$

由 (ii),

$$a_k \leq s_{n_k} \leq a_k + M \cdot 2^{1-k}, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots.$$

利用夾擠定理便知 $\{s_{n_k}\}$ 也收斂到 l。所以我們證明了 $\{s_m\}$ 有一個收斂的子數列。

設由實數組成的數列 $\{a_n\}$ 滿足下條件: 對任意 $\epsilon > 0$ 均有一正整數 N 和它對應, 使當 $m \geq N$, $n \geq N$ 時必有 $|a_n - a_m| < \epsilon$。則此數列 $\{a_n\}$ 稱爲 Cauchy 數列。這定義裡的條件叫 Cauchy 的驗斂條件 (convergence criterion)。

定理8. 實數的數列 $\{a_n\}$ 收斂的充要條件是它是一個 Cauchy 數列。

證: 設數列 $\{a_n\}$ 收斂於 l。對任意 $\epsilon > 0$ 均有一正整數 N 使當 $n > N$ 時恆有 $|a_n - l| < \frac{1}{2}\epsilon$。此時若 $m > n > N$ 則有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - l| + |a_n - l| < (\frac{1}{2}\epsilon) \cdot 2 = \epsilon.$$

所以 $\{a_n\}$ 爲 Cauchy 數列。

反之設 $\{a_n\}$ 爲 Cauchy 數列。我們先證明它有界: 爲此令 $\epsilon = 1$, 則有正整數 N 存在, 使當 $n > N$ 時恆有 $|a_n - a_{N+1}| < 1$。於是此時

$$|a_n| < 1 + |a_{N+1}|.$$

令 $M = \max\{1 + |a_k| : k = 1,\ 2, \ldots,\ N+1\}$。則 $|a_n| < M$ 對每個 n 均成立。

由 Bolzano-Weierstrass 定理知 $\{a_n\}$ 有一個收斂的子數列 $\{a_{n_k}\}$。令 $\lim a_{n_k} = l$。以下我們來證明原數列 $\{a_n\}$ 本身也收斂於 l。事實上令 $\epsilon > 0$。選取正整數 N, 使當 $m \geq N$

且 $n \geq N$ 時亦有 $|a_m - a_n| < \frac{1}{2}\epsilon$。在子數列中選定一項 a_{n_k}, 使 $n_k > N$ 且 $|a_{n_k} - l| < \frac{1}{2}\epsilon$。則當 $n > N$ 時我們有

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < \epsilon,$$

即 $\lim a_n = l$。

Cantor 的實數理論以 Cauchy 的驗斂條件爲基礎。注意每個實數都是一個收斂的有理數列的極限。利用這項觀察, 我們可以簡述 Cantor 的理論如次: 我們修改 Cauchy 數列的定義: 若一有理數列 $\{a_n\}$ 滿足下條件, 則稱它爲一 Cantor 數列: 對任意正有理數 ϵ 均可找到一正整數 N, 使當 $m \geq N$, $n \geq N$ 時恆有 $|a_n - a_m| < \epsilon$。利用逐項運算, 所有 Cantor 數列的集合形成一環。在這環中若兩個 Cantor 數列的差趨近於 0, 我們便說它們同值 (equivalent)。Cantor 認爲一個 Cantor 數列和所有和它同值的 Cantor 數列形成的集合便叫做一個實數。在這樣得到的實數系上可以定義全序和四則運算, 而把它變成一個完備賦序體。這套理論我們不擬詳論。

—本文作者爲國立中央大學數學系退休教授—