數學傳播 30卷3期, pp. 87-88

關於 Shapiro 迴圈對稱不等式的引申

鄔天泉

我們知道如下的迴圈不等式[1]:
已知 $x_1 \geq 0$, $x_i + x_{i+1} > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, $x_{n+1} = x_1$, 則

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \cdots + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \frac{n}{2}.$$

僅當 $n \in \{n \in N \mid 3 \leq n \leq 13\} \cup \{15, 17, 19, 21, 23\}$ 時成立。
下面我們先將 $n = 4$ 的情形作出引申, 然後推廣到一般情形。

從四個正數 x_1, x_2, x_3, x_4 中任選出二數求和, 再從剩餘二數中選一數除以此二數的和 (例如: $\dfrac{x_3}{x_1+x_2}$), 得到一新數

(1) 若有 m 種得到新數的方法, 則求 m;

(2) 同 (1) 這 m 種方法得到的 m 個新數依小而大組成一數列 $\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$, 設其總和爲 S, 試證: $S \geq 6$。

分析:

(1) $m = C_3^4 C_1^3 = 12$;

(2) 證法1: 注意由柯西不等式 $(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2$ 可得 $\sum \dfrac{a_i^2}{b_i} \geq \dfrac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i}$。(這裏 $a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$)。所以

$$\sum_{i,j,k=1,2,3,4}^{i,j,k\text{互不相同},\ j<k} \frac{x_i}{x_j+x_k} = \sum_{i,j,k=1,2,3,4}^{i,j,k\text{互不相同},\ j<k} \frac{x_i^2}{x_ix_j+x_ix_k}$$

$$\geq \frac{[3(x_1+x_2+x_3+x_4)]^2}{4[(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)+x_1x_3+x_2x_4]}$$

$$= \frac{9[x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)+2(x_1x_3+x_2x_4)]}{4[x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_1)+x_1x_3+x_2x_4]}$$

$$\geq \frac{9}{4} \cdot \left[\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{\sum x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} x_i^2} + 2\right] = 6。$$

證法2:

$$S=\left(\frac{x_3+x_4}{x_1+x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_3+x_4}\right)+\left(\frac{x_2+x_4}{x_1+x_3}+\frac{x_1+x_3}{x_2+x_4}\right)+\left(\frac{x_1+x_4}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_1+x_4}\right)\geq 2+2+2=6.$$

一般地, 我們有如下

命題: 從 n 個正數 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中任選出二數求和, 再從剩餘的 $n-2$ 個數中選一數除以此二數的和 (例如: $\dfrac{x_3}{x_1+x_2}$), 得到一新數

$$\frac{x_i}{x_j+x_k}\quad (i,j,k\in\{1,2,\cdots,n\},\ j<k,\ \text{且 } i,j,k \text{ 互不相同})$$

(1) 若有 m 種得到新數的方法, 則求 m;

(2) 同 (1) 這 m 種方法得到的 m 個新數依小而大組成一數列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$, 設其總和爲 S, 試證: $S\geq\dfrac{1}{4}n(n-1)(n-2)$。

證明:

(1) $m=C_3^nC_1^3=\dfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)$;

(2) 我們容易得到 $\displaystyle\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\leq\frac{n-1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2$。

再據 $\sum\dfrac{a_i^2}{b_i}\geq\left(\sum a_i\right)^2/\sum b_i$。(這裏 $a_i>0$, $b_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$) 有:

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{i,j,k=1,2,\cdots,n}^{i,j,k\text{互不相同},\ j<k}\frac{x_i}{x_j+x_k}=\sum_{i,j,k=1,2,\cdots,n}^{i,j,k\text{互不相同},\ j<k}\frac{x_i^2}{x_ix_j+x_ix_k}\\
&\geq\frac{[\frac{1}{2}(n-1)(n-2)(x_1+x_2+\cdots+x_n)]^2}{2(n-2)\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j}\\
&=\frac{(n-1)^2(n-2)\Big[x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2+2\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\Big]}{8\sum\limits_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j}\\
&=\frac{1}{8}(n-1)^2(n-2)\left[\left(\sum_{i=1}^n x_1^2\Big/\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\right)+2\right]\\
&\geq\frac{1}{8}(n-1)^2(n-2)\left(\frac{2}{n-1}+2\right)=\frac{1}{4}n(n-1)(n-2).
\end{aligned}$$

參考文獻

1. 盛立人, 嚴鎮軍, Shapiro 迴圈不等式,「初等數學前沿」vol.1(1995), 陳計, 葉中豪 主編。

—本文作者任教於浙江省台州市洪家中學; E-mail: wtqun@sina.com—