數學傳播 30卷4期, pp. 11-19

射影法描寫運動

虞言林

點的位置

我們先來討論這樣一個初等的幾何問題。設想曠野中有一個有興趣的點 p, 一架偵察機探得它的位置, 而後告訴一架別的飛機, 以便救援或清除該點。那麼偵察機是怎樣來描寫 p 點的位置呢?

用解析幾何的辦法去解決這個問題, 是大家熟悉的, 現在我們在此介紹一種不太熟悉的方法—射影法. 至於這兩種方法的優劣比較, 那不是本文的事。

在地平面 π 上選定一個四點標型 $\sigma=\langle A_1, A_2, A_3, A_0\rangle$, 四點標型是指: 四點 A_1, A_2, A_3, A_0 中任意三點不共線。現在我們利用這個 σ, 建立 p 點的射影座標如下。

在機艙中 (R^3中一個區域) 隨意選一個點 O, 和四個向量 $A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_0^*$, 使得

$$\begin{cases} A_i^* \text{ 平行於 } \overrightarrow{OA_i}, & \forall\ i=0,1,2,3, \\ A_1^*+A_2^*+A_3^*=A_0^*. \end{cases}$$

按上面方式定義出來的 $\langle A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_0^*\rangle$ 稱爲是四點標型 σ 的一個提升, 簡記爲 σ^*。上面的 A_i^* 稱爲點 A_i 關於 O 點的提升。接下來對於要考慮的點 p, 我們選取它的一個關於 O 點的提升 p^*, 即要求 p^*是R^3 中一個向量, 並且滿足

$$p^* \text{ 平行於 } \overrightarrow{Op}.$$

於是從下式

$$p^*=y_1A_1^*+y_2A_2^*+y_3A_3^*$$

求出 (y_1, y_2, y_3), 而後有下列的定義

定義: 對於上面定義的三個數 (y_1, y_2, y_3), 它們的聯合比 $(y_1:y_2:y_3)$ 稱爲是點 p 關於 σ 的 射影座標。

證明定義的合理性: 定義射影座標的過程中, 點 O 和五個提升向量 $p^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_0^*$ 的選取有一定的任意性, 在文獻 [1]及其中的附錄 D 中證明了: 射影座標 $(y_1 : y_2 : y_3)$ 的定義與點 O, 和五個向量的選取無關, 它只和 p 與 σ 有關。我們就現在的特殊情形給予如下的直接的證明。

首先當 O 點固定時, 我們來證明 $(y_1 : y_2 : y_3)$ 的定義與五個向量 $p^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_0^*$ 的選取無關。如果另外又取 $p^\#, A_1^\#, A_2^\#, A_3^\#, A_0^\#$, 這時從它們分別平行於向量 $p^*, A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_0^*$, 以及等式

$$A_1^\# + A_2^\# + A_3^\# = A_0^\#,$$

我們立知: 存在兩個非零常數 ρ_1, ρ_2 使得

$$p^\# = \rho_1 p^*, \ \ A_1^\# = \rho_2 A_1^*, \ \ A_2^\# = \rho_2 A_2^*, \ \ A_3^\# = \rho_2 A_3^*, \ \ A_0^\# = \rho_2 A_0^*.$$

根據新提升下的等式

$$p^\# = \widetilde{y}_1 A_1^\# + \widetilde{y}_2 A_2^\# + \widetilde{y}_3 A_3^\#$$

得

$$p^* = \widetilde{y}_1 \frac{\rho_2}{\rho_1} A_1^* + \widetilde{y}_2 \frac{\rho_2}{\rho_1} A_2^* + \widetilde{y}_3 \frac{\rho_2}{\rho_3} A_1^*.$$

於是與 $p^* = y_1 A_1^* + y_2 A_2^* + y_3 A_3^*$ 比較可得

$$y_1 = \widetilde{y}_1 \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad y_2 = \widetilde{y}_2 \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad y_3 = \widetilde{y}_3 \frac{\rho_2}{\rho_1},$$

從而

$$(y_1 : y_2 : y_3) = (\widetilde{y}_1 : \widetilde{y}_2 : \widetilde{y}_3).$$

下面我們將證明射影座標的定義與O的選取無關性, 爲此先證一個關於重心座標的引理。

引理1: 設 π 是 R^3 中一張平面, A_1, A_2, A_3 是 π 中處於一般位置的三個點 (即構成非退化三角形), 於是對於任意 $p \in \pi$, 存在惟一 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 使得

(1) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$,

(2) 對於任意 $O \in R^3$, 有 $\overrightarrow{Op} = \lambda_1 \overrightarrow{OA_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OA_2} + \lambda_3 \overrightarrow{OA_3}$。

此外, 如果有一個 $O \in R^3$ 使得 $\overrightarrow{Op} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \mu_2 \overrightarrow{OA_2} + \mu_3 \overrightarrow{OA_3}$ 成立, 那麼這裏的 (μ_1, μ_2, μ_3) 就是上面的 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$。

證明: 選定一個不過平面 π 的點 O。顯然 $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ 線性無關, 於是存在惟一 (μ_1, μ_2, μ_3) 使得

$$\overrightarrow{Op} = \mu_1 \overrightarrow{OA_1} + \mu_2 \overrightarrow{OA_2} + \mu_3 \overrightarrow{OA_3}.$$

上式兩端減去 $(\mu_1+\mu_2+\mu_3)\overrightarrow{Op}$ 得

$$(1-\mu_1-\mu_2-\mu_3)\overrightarrow{Op}=\mu_1(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{Op})+\mu_2(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{Op})+\mu_3(\overrightarrow{OA_3}-\overrightarrow{Op}),$$

或寫爲

$$(1-\mu_1-\mu_2-\mu_3)\overrightarrow{Op}=\mu_1\overrightarrow{pA_1}+\mu_2\overrightarrow{pA_2}+\mu_3\overrightarrow{pA_3}.$$

由於 $\overrightarrow{pA_1},\overrightarrow{pA_2},\overrightarrow{pA_3}$ 平行於 π, 而 $\overrightarrow{Op}$ 不平行於 π, 故上式右端爲零, 即有 $(1-\mu_1-\mu_2-\mu_3)=0$, 它就是 $\mu_1+\mu_2+\mu_3=1$。

現在對於任意的 $\widetilde{O}\in R^3$, 下列的計算

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\widetilde{O}p}&=\overrightarrow{Op}-\overrightarrow{O\widetilde{O}}=\mu_1\overrightarrow{OA_1}+\mu_2\overrightarrow{OA_2}+\mu_3\overrightarrow{OA_3}-\overrightarrow{O\widetilde{O}}\\&=\mu_1(\overrightarrow{\widetilde{O}A_1}+\overrightarrow{O\widetilde{O}})+\mu_2(\overrightarrow{\widetilde{O}A_2}+\overrightarrow{O\widetilde{O}})+\mu_3(\overrightarrow{\widetilde{O}A_3}+\overrightarrow{O\widetilde{O}})-\overrightarrow{O\widetilde{O}}\\&=\mu_1\overrightarrow{\widetilde{O}A_1}+\mu_2\overrightarrow{\widetilde{O}A_2}+\mu_3\overrightarrow{\widetilde{O}A_3}\end{aligned}$$

表明此處的(μ_1,μ_2,μ_3) 就是引理中欲求的 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$, 並且引理中的最後一個斷言也成立, 故引理證畢。

引理中的 $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 稱爲 p 點關於 $\Delta(A_1,A_2,A_3)$ 的重心座標。上述的引理1其實表明: 重心座標與 O 無關。而我們要證明的是: 射影座標 $(y_1:y_2:y_3)$ 的定義與 O 的選取無關。設 O, $\widetilde{O}$ 是 π 外的兩個點, 我們想從下列兩式

$$p^*=y_1A_1^*+y_2A_2^*+y_3A_3^*,\qquad p^\#=\widetilde{y}_1\widetilde{A}_1^*+\widetilde{y}_2\widetilde{A}_2^*+\widetilde{y}_3\widetilde{A}_3^*$$

推出

$$y_1:y_2:y_3=\widetilde{y}_1:\widetilde{y}_2:\widetilde{y}_3.$$

上面的 $A_i^*,\widetilde{A}_i^*$ 是點 A_i 分別關於 O 和 $\widetilde{O}$ 的提升向量, 故可令

$$A_i^*=\epsilon_i\overrightarrow{OA_i},\qquad \widetilde{A}_i^*=\widetilde{\epsilon}_i\overrightarrow{\widetilde{O}A_i},\qquad \forall\, i=1,2,3.$$

同理可令

$$\overrightarrow{Op}=\rho p^*,\quad \overrightarrow{\widetilde{O}p}=\eta p^\#.$$

於是我們便有

$$\overrightarrow{Op}=\rho p^*=\rho y_1A_1^*+\rho y_2A_2^*+\rho y_3A_3^*=\rho y_1\epsilon_1\overrightarrow{OA_1}+\rho y_2\epsilon_2\overrightarrow{OA_2}+\rho y_3\epsilon_3\overrightarrow{OA_3}.$$

利用引理1, 將O換成任意的$\widetilde{O}$, 就得

$$\overrightarrow{\widetilde{O}p}=\rho y_1\epsilon_1\overrightarrow{\widetilde{O}A_1}+\rho y_2\epsilon_2\overrightarrow{\widetilde{O}A_2}+\rho y_3\epsilon_3\overrightarrow{\widetilde{O}A_3}.$$

將它和等式

$$\overrightarrow{\widetilde{O}p}=\eta p^{\#}=\eta\widetilde{y}_1\widetilde{\epsilon}_1\overrightarrow{\widetilde{O}A_1}+\eta\widetilde{y}_2\widetilde{\epsilon}_2\overrightarrow{\widetilde{O}A_2}+\eta\widetilde{y}_3\widetilde{\epsilon}_3\overrightarrow{\widetilde{O}A_3}$$

比較, 便得

$$\rho y_1\epsilon_1=\eta\widetilde{y}_1\widetilde{\epsilon}_1,\qquad \rho y_2\epsilon_2=\eta\widetilde{y}_2\widetilde{\epsilon}_2,\qquad \rho y_3\epsilon_3=\eta\widetilde{y}_3\widetilde{\epsilon}_3.$$

將上述關於p的討論換成關於 A_0 點的討論, 相應於上面的等式中的 y_i, $\widetilde{y}_i$ 皆爲 1。新情況下的 (ρ,η), 無妨記爲 $(\dfrac{1}{\epsilon_0},\dfrac{1}{\widetilde{\epsilon}_0})$, 它們滿足

$$\overrightarrow{OA_0}=\rho A_0^*=\frac{1}{\epsilon_0}A_0^*,\quad \overrightarrow{\widetilde{O}A_0}=\eta A_0^{\#}=\frac{1}{\widetilde{\epsilon}_0}A_0^{\#}.$$

於是新情況下的等式是

$$\frac{1}{\epsilon_0}\epsilon_1=\frac{1}{\widetilde{\epsilon}_0}\widetilde{\epsilon}_1,\qquad \frac{1}{\epsilon_0}\epsilon_2=\frac{1}{\widetilde{\epsilon}_0}\widetilde{\epsilon}_2,\qquad \frac{1}{\epsilon_0}\epsilon_3=\frac{1}{\widetilde{\epsilon}_0}\widetilde{\epsilon}_3,$$

換句話說, 我們有

$$\frac{\epsilon_0}{\widetilde{\epsilon}_0}=\frac{\epsilon_1}{\widetilde{\epsilon}_1}=\frac{\epsilon_2}{\widetilde{\epsilon}_2}=\frac{\epsilon_3}{\widetilde{\epsilon}_3}.$$

現在我們回來看看關於 p 情形的等式。從那裏可推出

$$\frac{y_1}{\widetilde{y}_1}=\frac{\eta\widetilde{\epsilon}_1}{\rho\epsilon_1}=\frac{\eta\widetilde{\epsilon}_0}{\rho\epsilon_0},$$

同理有

$$\frac{y_2}{\widetilde{y}_2}=\frac{\eta\widetilde{\epsilon}_0}{\rho\epsilon_0},\qquad \frac{y_3}{\widetilde{y}_3}=\frac{\eta\widetilde{\epsilon}_0}{\rho\epsilon_0}.$$

顯然從上面式子容易推出 $y_1:y_2:y_3=\widetilde{y}_1:\widetilde{y}_2:\widetilde{y}_3$。證明完畢。

注(1): 上面介紹了一個從 σ 和 p 求出 $(y_1:y_2:y_3)$ 的演算法。接著可以證明: 當 σ 固定時, $(y_1:y_2:y_3)$ 與 p 彼此一一對應 (當然, 我們需要在 π 中增加一些新的點, 人們通常稱之爲無窮遠點, 這才能保證一一對應)。有了一一對應, 我們可以引進等式記號

$$p\overset{\sigma}{=}(y_1:y_2:y_3),\qquad \text{或者}\qquad p=(\sigma,\ (y_1:y_2:y_3)\ ).$$

注(2): 當知道 σ 和 $(y_1:y_2:y_3)$ 之後, 如何來求 p 呢? 可以先取四點標型 σ 的一個提升 $\langle A_1^*,A_2^*,A_3^*,A_0^*\rangle$, 由下式

$$\overrightarrow{Oq}=y_1A_1^*+y_2A_2^*+y_3A_3^*$$

確定 q, 於是 p 是直線 $\overline{Oq}$ 與平面 π 的交點。這樣一來, 飛機之間可用射影座標傳遞點的位置資訊, 確切講, 只要告知對方 σ 和 $(y_1 : y_2 : y_3)$, 對方便能根據注 (2) 自己求出 p。

仿射切線的射影描寫

設平面 π 中有一條曲線 $p(t)$, 利用 π 中的仿射結構, 我們知道在 $p(0)$ 處的仿射切線是

$$T(t) = p(0) + p'(0)t.$$

上式是寫在平面 π 中的, 它的確切含意是: 在 π 中任意選定一點 Q 後, 把等式中前兩項看成以 Q 爲起點的向量之終點。第三項是 π 中活動向量。

設 $\sigma = \langle A_1, A_2, A_3, A_0\rangle$ 是 π 中一個固定的四點標型, $\sigma^* = \langle A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_0^*\rangle$ 是四點標型 σ 的一個標型提升, 當然滿足

$$A_1^* + A_2^* + A_3^* = A_0^*.$$

於是 π 中的曲線 $p(t)$ 可表爲

$$\overrightarrow{Op(t)} = y_1(t)A_1^* + y_2(t)A_2^* + y_3(t)A_3^*.$$

按照前面的理解, $y_1(t) : y_2(t) : y_3(t)$ 是曲線 $p(t)$ 在 σ 下的射影座標, 記爲

$$p(t) = (\sigma\ ,\ y_1(t) : y_2(t) : y_3(t)).$$

曲線 $p(t)$ 在 π 中的仿射切線 $T(t)$, 它放在 R^3 中有一個如下的表示

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT(t)} = \overrightarrow{O(p(0)+p'(0)t)} &= \overrightarrow{Op(0)} + t\cdot \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\overrightarrow{Op(t)}\\ &= (y_1(0)+ty_1'(0))A_1^* + (y_2(0)+ty_2'(0))A_2^* + (y_3(0)+ty_3'(0))A_3^*,\end{aligned}$$

這就得到點$T(t)$的射影表示 (注意此處 $\overrightarrow{OT(t)}$ 是 $T(t)$ 的某一個提升)

$$T(t) = (\sigma,\ (y_1(0)+ty_1'(0)) : (y_2(0)+ty_2'(0)) : (y_3(0)+ty_3'(0))).$$

這裏的 $T(t)$ 是一條帶著參數 t 的仿射切線, 射影空間中有一條相應的不帶參數的切線, 也許人們更熟悉一些。那是

$$l^+ = \{p = (\sigma, y_1 : y_2 : y_3\ )\mid \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0\},$$

其中

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) \times (y_1'(0), y_2'(0), y_3'(0)).$$

顯然$T(t) \in l^+$。在這裏我們總假定$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$不全爲零, 不然的話, 曲線 $p(t)$ 在 $p(0)$ 處退化, 這是一個求切線的平凡情形。

定理: 在 l^+ 上定義三個點

$$\begin{cases} Q_0 = (\sigma,\ (y_1(0) : y_2(0) : y_3(0))\ ), \\ Q_\infty = (\sigma,\ (y_1'(0) : y_2'(0) : y_3'(0))\ ), \\ Q_1 = (\sigma,\ (y_1(0) + y_1'(0) : y_2(0) + y_2'(0) : y_3(0) + y_3'(0))\ ), \end{cases}$$

則對於任意的 t, $Q_0, Q_\infty, Q_1, T(t)$ 四點共線, 並且參數切線有如下運算式

$$T(t) = (\langle Q_0, Q_\infty, Q_1 \rangle,\ 1 : t\ ).$$

換句話說, 共線四點 $Q_0, Q_\infty, Q_1, T(t)$ 的叉比 (又稱交比) 是 t 。簡單寫來是

$$[Q_0, Q_\infty, Q_1, T(t)] = t.$$

在證明定理之前, 我們先證明文獻 [1]中的一個引理。

引理2: 設給定一個四點標型 $\sigma = \langle A_1, A_2, A_3, A_0 \rangle$, 並且它帶有一個提升 $\sigma^* = \langle A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_0^* \rangle$, 又給定一條不包含 A_0 的射影直線 l^+,

$$l^+ = \{\ (\sigma,\ y_1 : y_2 : y_3\ ) \mid \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0\}.$$

令

$$P_i = \overline{A_0 A_i} \cap l^+, \qquad \forall\ i = 1, 2, 3.$$

則有常數 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 和 P_i 的提升P_i^*, 使得下式成立

$$P_1^* = A_1^* + \lambda_1 A_0^*, \quad P_2^* = A_2^* + \lambda_2 A_0^*, \quad P_3^* = A_3^* + \lambda_3 A_0^*.$$

此時接著有

$$\begin{cases} P_i^*,\ \ \lambda_i \text{ 是惟一確定的}, \\ P_1^* + P_2^* + P_3^* = 0, \\ 1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \| (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \end{cases}$$

證明: 對於固定的i, 因爲 A_0, A_i, P_i 共線, 故 $\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OP_i}$ 線性相關, 於是有

$$\mu_1 \overrightarrow{OA_0} + \mu_2 \overrightarrow{OA_i} + \mu_3 \overrightarrow{OP_i} = 0.$$

其中 μ_3, μ_2 皆不爲零, 不然的話, 它導至 A_0, A_i 兩點重合, 或者 A_0, P_i 兩點重合。容易取 μ_2 使得 $\mu_2\overrightarrow{OA_i} = A_i^*$, 令 $P_i^* = -\mu_3\overrightarrow{OP_i}$, 那麼欲求的 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 便存在了。至於 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的惟一性可在上面的論述中易見。利用

$$P_i^* = A_i^* + \lambda_i A_0^* = A_i^* + \lambda_i(A_1^* + A_2^* + A_3^*),$$

我們有

$$(P_1^*, P_2^*, P_3^*) = (A_1^*, A_2^*, A_3^*)\begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 1+\lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1+\lambda_3 \end{pmatrix}.$$

注意到 (P_1^*, P_2^*, P_3^*) 共面, (A_1^*, A_2^*, A_3^*) 線性無關, 故可得

$$\det\begin{pmatrix} 1+\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 1+\lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 1+\lambda_3 \end{pmatrix} = 0.$$

經計算, 上述行列式的等式就是

$$1 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

另外, 利用上面的等式, 易有

$$P_1^* + P_2^* + P_3^* = \sum_{i=1}^{3}(A_i^* + \lambda_i A_0^*) = \sum_{i=1}^{3} A_i^* + \sum_{i=1}^{3}\lambda_i A_0^* = \sum_{i=1}^{3} A_i^* - A_0^* = 0.$$

注意到l^+在σ下的方程是$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$, 由 $P_i^* = A_i^* + \lambda_i(A_1^* + A_2^* + A_3^*)$, 便可知 $P_1 = (\sigma,\ (1+\lambda_1) : \lambda_1 : \lambda_1\ )$。$P_1$ 在直線 l^+ 上, 這就表示

$$\alpha_1(1+\lambda_1) + \alpha_2\lambda_1 + \alpha_3\lambda_1 = 0.$$

上式導出

$$\alpha_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\lambda_1.$$

對 P_2, P_3 作類似討論, 得出結論後綜合得知 $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$。至此易見引理成立。

引理3: 記號同前, 若令

$$g = \begin{pmatrix} y_2(0) - y_1(0) & y_2'(0) - y_1'(0) \\ y_3(0) - y_1(0) & y_3'(0) - y_1'(0) \end{pmatrix}$$

則

$$\overrightarrow{OT(t)}=\sum_{i=1}^{3}(y_i(0)+ty_i'(0))A_i^*=(P_2^*,P_3^*)g\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}.$$

證明: 由於

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\|(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(y_1(0),y_2(0),y_3(0))\times(y_1'(0),y_2'(0),y_3'(0)),$$

故

$$\sum_{i=1}^{3}\lambda_i y_i(0)=0,\qquad \sum_{i=1}^{3}\lambda_i y_i'(0)=0.$$

從而再利用 $P_1^*+P_2^*+P_3^*=0$ 便有下列等式

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OT(t)}&=\textstyle\sum_{i=1}^{3}(y_i(0)+ty_i'(0))A_i^*=\sum_{i=1}^{3}(y_i(0)+ty_i'(0))(P_i^*-\lambda_iA_0^*)\\&=\textstyle\sum_{i=1}^{3}(y_i(0)+ty_i'(0))P_i^*\\&=\big(\,y_2(0)-y_1(0))+t(y_2'(0)-y_1'(0)\big)\,P_2^*\\&\quad+\big(\,y_3(0)-y_1(0))+t(y_3'(0)-y_1'(0)\big)\,P_3^*\\&=(P_2^*,P_3^*)g\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

引理證畢。

前面定理的證明: 令

$$(Q_0^*,Q_\infty^*)=(P_2^*,P_3^*)g,\qquad Q_1^*=Q_0^*+Q_\infty^*,$$

我們可以知道 Q_0^*,Q_∞^*,Q_1^* 是切線 l^+ 上三個點的提升, 記這三點爲 Q_0,Q_∞,Q_1。注意到 $\langle Q_0^*,Q_\infty^*,Q_1^*\rangle$ 是三點標型 $\langle Q_0,Q_\infty,Q_1\rangle$ 的提升, 從而利用引理3推得的下列等式

$$Q_0^*=(Q_0^*,Q_\infty^*)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=(P_2^*,P_3^*)g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{3}y_i(0)A_i^*$$

可知

$$Q_0=(\sigma,\ (y_1(0):y_2(0):y_3(0))\ ).$$

類似地, 可以證明引理中所說的 Q_∞, Q_1 的運算式。利用引理 3 有

$$\overrightarrow{OT(t)}=(Q_2^*,Q_3^*)\begin{pmatrix}1\\ t\end{pmatrix},$$

從而

$$T(t) = (\langle Q_0, Q_\infty, Q_1 \rangle,\ 1 : t\ ).$$

又從

$$Q_1^* = Q_0^* + Q_\infty^*, \qquad \overrightarrow{OT(t)} = Q_0^* + tQ_\infty^*,$$

並按照 [3]第九行的公式, 知道 $Q_0, Q_\infty, Q_1, T(t)$ 四點的叉比是 t 。定理證畢。

致謝: 2005年11月至2006年1月期間, 應鄭日新所長的邀請, 我在臺北中央研究院數學研究所做爲期三個月的訪問。受到了熱情接待, 體驗到了良好的研究氣氛, 因而安頓下來, 便想到了“切向量的射影描寫”。這是一個小小的想法, 現投稿「數學傳播」, 以之對中央研究院數學所的好客表示由衷的感謝。另外, 審稿人指出王九逵先生的文章, 訂正了 [1]中關於交比的定義, 那個定義與傳統叉比的定義不合。在此也表示感謝。

参考文獻

1. 虞言林, 楊松林, 解析幾何, 普通高等教育“十五”國家級規劃教材, 科學出版社, 2005。
2. 王九逵, 射影平面六講—-第三講, 數學傳播, 第25卷 (第3期), 52-54。
3. 王九逵, 射影平面六講—-第四講, 數學傳播, 第25卷 (第4期), 43-45。

—本文作者任教於中國蘇州大學數學系—