數學傳播 31卷1期, pp. 83-90

一個不等式的誕生

石長偉

內容提要: 本文以實際生活中的一個的最優化問題的結論爲變式研究的原始研究對象, 採用 “係數”、“指數”、“項數” 的不斷推廣, 依據多維均值不等式、三角代換、導數、數學歸納法, 逐步推導出結構對稱優美完整、應用極其廣泛的廣義的對稱權方和不等式。

關鍵詞: 變式研究、多維均值不等式、三角代換、導數、數學歸納法、廣義的對稱權方和不等式

1. 問題的提出

首先, 我們來考慮一個生活中的實際問題: 已知在兩條互相垂直的公路之間有一位置固定的城鎮, 欲經過此城鎮修一條公路與兩條公路相交, 如何建最經濟?

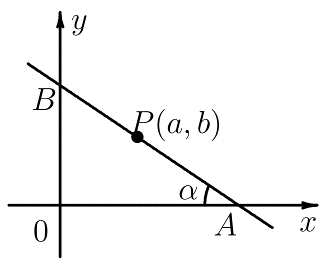

圖1

2. 問題的解決

分析: (如圖1) 設 x 軸、y 軸分別爲兩條互垂的公路, $P(a,b)$ 點爲固定的城鎮, 經過 P 點的任意直線與 x 軸、y 軸交於 A、B點, 問題轉化爲求 $|AB|$ 的最小值。又設直線 AB 的傾斜角的補角爲 α, 由平面幾何知識知 $|AB|=a\cdot\sec\alpha+b\cdot\csc\alpha$, 針對此式最小值的求解, 我們運用三元均值不等式, 具體如下:

$$\begin{aligned}|AB|^2&=a^2\sec^2\alpha+b^2\csc^2\alpha+2ab\sec\alpha\csc\alpha\\&=a^2(1+\tan^2\alpha)+b^2(1+\cot^2\alpha)+2ab(\tan\alpha+\cot\alpha)\\&=a^2+b^2+(a^2\tan^2\alpha+ab\cot\alpha+ab\cot\alpha)+(b^2\cot^2\alpha+ab\tan\alpha+ab\tan\alpha)\end{aligned}$$

$$\geq a^2+b^2+3a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^3$$

若且唯若 $\begin{cases} a^2\tan^2\alpha=ab\cot\alpha \\ b^2\cot^2\alpha=ab\tan\alpha \end{cases}$ 取等號　　即 $\alpha=\arctan\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$ 故建路的最佳方案是經過 P 點的直線的傾斜角爲 $\pi-\arctan\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}$, 且 $|AB|_{\min}=(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$。將此題的結論純數學表達爲: $\dfrac{a}{\cos\alpha}+\dfrac{b}{\sin\alpha}\geq(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ $(\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\ a>0,\ b>0)$ $(*)$

3. 問題結論的拓廣

反覆偵察 $(*)$ 式, 其有如下特徵:

(i) $\cos^2x+\sin^2x=1$ 中 $\cos x$、$\sin x$ 的指數2恰好等於 $(*)$ 式右邊指數 $\frac{2}{3}$ 中的2。

(ii) $(*)$ 式右邊的 a、b 的指數 $\frac{2}{3}$ 的分母3恰好等於左邊 $\cos x$、$\sin x$ 的指數1與 $\cos^2x+\sin^2x=1$ 中指數 2 之和。

綜合 (i)、(ii) 由此產生諸多猜想。

3.1. 關於 $(*)$ 指數的推廣的猜想

已知 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $m\in N^*$, $a,b\in R^+$, 證明或否定

$$\frac{a}{\cos^m\alpha}+\frac{b}{\sin^m\alpha}\geq\left(a^{\frac{2}{m+2}}+b^{\frac{2}{m+2}}\right)^{\frac{m+2}{2}} \tag{3.1}$$

證明: 假設 (3.1) 式成立, 則

$$\frac{a}{\cos^m\alpha}+\frac{b}{\sin^m\alpha}\geq\left(a^{\frac{2}{m+2}}+b^{\frac{2}{m+2}}\right)^{\frac{m+2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow a^{\frac{2}{m+2}}+b^{\frac{2}{m+2}}\leq\left(\frac{a}{\cos^m\alpha}+\frac{b}{\sin^m\alpha}\right)^{\frac{2}{m+2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^{\frac{2}{m+2}}}{\left(\dfrac{a}{\cos^m\alpha}+\dfrac{b}{\sin^m\alpha}\right)^{\frac{2}{m+2}}}+\frac{b^{\frac{2}{m+2}}}{\left(\dfrac{a}{\cos^m\alpha}+\dfrac{b}{\sin^m\alpha}\right)^{\frac{2}{m+2}}}\leq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{\dfrac{a}{\cos^m\alpha}+\dfrac{b}{\sin^m\alpha}}\right)^{\frac{2}{m+2}}+\left(\frac{b}{\dfrac{a}{\cos^m\alpha}+\dfrac{b}{\sin^m\alpha}}\right)^{\frac{2}{m+2}}\leq 1$$

設 $A=\dfrac{a}{\cos^m\alpha}$, $B=\dfrac{b}{\sin^m\alpha}$, 則上式左邊

$$=\left(\frac{a}{A+B}\cdot\frac{a}{A+B}\right)^{\frac{1}{m+2}}+\left(\frac{b}{A+B}\cdot\frac{b}{A+B}\right)^{\frac{1}{m+2}}$$

$$
\begin{aligned}
&=\Big(\frac{A\cos^m\alpha}{A+B}\cdot\frac{A\cos^m\alpha}{A+B}\Big)^{\frac{1}{m+2}}+\Big(\frac{B\sin^m\alpha}{A+B}\cdot\frac{B\sin^m\alpha}{A+B}\Big)^{\frac{1}{m+2}}\\
&=\Big(\frac{A}{A+B}\cdot\frac{A}{A+B}\cdot\underbrace{\cos^2\alpha\cdots\cos^2\alpha}_{m\text{個}}\Big)^{\frac{1}{m+2}}+\Big(\frac{B}{A+B}\cdot\frac{B}{A+B}\cdot\underbrace{\sin^2\alpha\cdots\sin^2\alpha}_{m\text{個}}\Big)^{\frac{1}{m+2}}\\
&\le\frac{\dfrac{2A}{A+B}+m\cos^2\alpha}{m+2}+\frac{\dfrac{2B}{A+B}+m\sin^2\alpha}{m+2}=1
\end{aligned}
$$

通過分析法, 依據 n 元均值不等式, 使猜想變爲現實。其實文章提出的問題隸屬猜想 (3.1) 的限定, 猜想 (3.1) 的結果是文章提出的問題的推廣。爲了使 (3.1) 式更具一般性, 我們描述如下:

已知 $m\in N$, $a,b\in R^+$, $x^2+y^2=1$, $x,y\in R^+$, 求證

$$\frac{a}{x^m}+\frac{b}{y^m}\ge\Big(a^{\frac{2}{m+2}}+b^{\frac{2}{m+2}}\Big)^{\frac{m+2}{2}}\tag{3.2}$$

式 (3.2) 反映的是雙變數且其平方和爲1時, $\dfrac{a}{x^m}+\dfrac{b}{y^m}$ 的最小值問題。如果變爲 n 元變數各自 m $(m\in N^*)$ 次冪之和爲1時, 又該如何?

3.2. 關於 (3.2) 係數、項數、指數的推廣的猜想

已知 $a_i,b_i\in R^+$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $(n\ge 2)$; $p,m\in N^*$; $\displaystyle\sum_{i=1}^n b_i^p\le 1$。證明或否定:

$$\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i^m}\ge\Big(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{p}{p+m}}\Big)^{\frac{p+m}{p}}\tag{3.3}$$

證明: 假設 (3.3) 式成立, 則

$$\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i^m}\ge\Big(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{p}{p+m}}\Big)^{\frac{p+m}{p}}\Leftrightarrow\Big(\sum_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i^m}\Big)^{\frac{p}{p+m}}\ge\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{p}{p+m}}\Leftrightarrow\frac{\sum\limits_{i=1}^n a_i^{\frac{p}{p+m}}}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i^m}\Big)^{\frac{p}{p+m}}}\le 1$$

$$\Leftrightarrow\frac{a_1^{\frac{p}{p+m}}}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i^m}\Big)^{\frac{p}{p+m}}}+\frac{a_2^{\frac{p}{p+m}}}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i^m}\Big)^{\frac{p}{p+m}}}+\cdots+\frac{a_n^{\frac{p}{p+m}}}{\Big(\sum\limits_{i=1}^n\frac{a_i}{b_i^m}\Big)^{\frac{p}{p+m}}}\le 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i^m}}\right)^{\frac{p}{p+m}} + \left(\frac{a_2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i^m}}\right)^{\frac{p}{p+m}} + \cdots + \left(\frac{a_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i^m}}\right)^{\frac{p}{p+m}} \le 1 \tag{3.3}$$

設 $A_1=\frac{a_1}{b_1^m}, A_2=\frac{a_2}{b_2^m}, \ldots, A_n=\frac{a_n}{b_n^m}$, 則 (3.3) 式的左邊個

$$=\Big(\frac{A_1b_1^m}{A_1+A_2+\cdots+A_n}\Big)^{\frac{p}{p+m}}+\Big(\frac{A_2b_2^m}{A_1+A_2+\cdots+A_n}\Big)^{\frac{p}{p+m}}+\cdots+\Big(\frac{A_nb_n^m}{A_1+A_2+\cdots+A_n}\Big)^{\frac{p}{p+m}}$$

$$=\left(\underbrace{\frac{A_1}{A_1+A_2+\cdots+A_n}\cdots\cdots\frac{A_1}{A_1+A_2+\cdots+A_n}}_{p\text{個}}\cdot\underbrace{b_1^p\cdots b_1^p}_{m\text{個}}\right)^{\frac{1}{m+p}}+\cdots$$

$$\cdots+\left(\underbrace{\frac{A_n}{A_1+A_2+\cdots+A_n}\cdots\cdots\frac{A_n}{A_1+A_2+\cdots+A_n}}_{p\text{個}}\cdot\underbrace{b_n^p\cdots b_n^p}_{m\text{個}}\right)^{\frac{1}{m+p}}$$

$$\le\frac{\frac{pA_1}{A_1+\cdots+A_n}+mb_1^p}{m+p}+\frac{\frac{pA_2}{A_1+\cdots+A_n}+mb_2^p}{m+p}+\cdots+\frac{\frac{pA_n}{A_1+\cdots+A_n}+mb_n^p}{m+p}$$

$$=\frac{p+m\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^p}{p+m}\le 1$$

若且唯若 $\begin{cases}\dfrac{A_1}{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i}=b_1^p\\ \dfrac{A_2}{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i}=b_2^p\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{A_n}{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i}=b_n^p\end{cases}$ 時取等號, 即 $\frac{a_1}{b_1^{p+m}}=\frac{a_2}{b_2^{p+m}}=\cdots=\frac{a_n}{b_n^{p+m}}$

依據式的合理推導過程, 使猜想 (3.3) 變爲定理。即

若 $a_i,b_i\in R^+, i=1,2,\ldots,n\ (n\ge 2)$; $\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^p\le 1, p,m\in N^*$, 則 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i^p}\ge\Big(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^{\frac{m}{m+p}}\Big)^{\frac{m+p}{m}}$。

4. 猜想成立的深層次的研究

從問題的提出、解決、結果的關係式的特徵分析及問題的推廣, 我們始終沒有離開以下兩點: 一是已知與求證的關係式的左邊的指數都是自然數; 二是已知條件中的 $\sum_{i=1}^{n} b_i^m \leq 1$。這兩點促使了我們對實際問題做出了一些重要的推廣, 但欲更深入的推廣的發現, 卻阻礙了思維的縱向的發展, 因爲這些推廣是以均值不等式爲依據的。正所謂的"成也蕭何, 敗也蕭何"。如何擺脫這種因境呢? 我們知道: 和的關係式只不過是項數大於或者等於兩項式子相加而成的。爲了走出這兩點條件的束縛, 爲何不從已知兩項的和以求與已知相關的兩項和爲出發點呢? 如果兩項的不等式成立, 然後以數學歸納法證之豈不妙哉!

4.1. 關於 $(*)$ 式更一般化的探索

已知 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in R^+$, $b_1^\rho + b_2^\rho = s$, $\rho, \lambda \in R$, 討論 $a_1 b_1^\lambda + a_2 b_2^\lambda$ 的值。

分析: 由 $b_1^\rho + b_2^\rho = s$ 知 $\left(\sqrt{\frac{b_1^\rho}{s}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b_2^\rho}{s}}\right)^2 = 1$, 因爲此式從形式上, 完全合乎三角函數的平方關係式的 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, 所以運用三角代換設 $b_1^\rho = s\cos^2\theta$, $b_2^\rho = s\sin^2\theta$, $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 故 $a_1 b_1^\lambda + a_2 b_2^\lambda = s^{\frac{\lambda}{\rho}}\left(a_1 \cos^{\frac{2\lambda}{\rho}}\theta + a_2 \sin^{\frac{2\lambda}{\rho}}\theta\right)$, 設 $f(\theta) = a_1 \cos^{\frac{2\lambda}{\rho}}\theta + a_2 \sin^{\frac{2\lambda}{\rho}}\theta$, 則 $f'(\theta) = \frac{2\lambda}{\rho}\left(a_2 \sin^{\frac{2\lambda}{\rho}-1}\theta\cos\theta - a_1\cos^{\frac{2\lambda}{\rho}-1}\theta\sin\theta\right)$。令 $f'(\theta) = 0$, 知 $\theta = \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{\rho}{2(\lambda-\rho)}}$, 所以 $f\left(\arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{\rho}{2(\lambda-\rho)}}\right) = \frac{a_1 a_2^{\frac{\lambda}{\lambda-\rho}} + a_2 a_1^{\frac{\lambda}{\lambda-\rho}}}{\left(a_1^{\frac{\rho}{\lambda-\rho}} + a_2^{\frac{\rho}{\lambda-\rho}}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}}} = \left(a_1^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}} + a_2^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\right)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}$。下面由 $\frac{\lambda}{\rho}$ 的取值進行討論:

4.1.1. 當 $\frac{\lambda}{\rho} \in (1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$ 時, 則 $(0, \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{\rho}{2(\lambda-\rho)}})$ 爲 $f(\theta)$ 的遞減區間且 $(\arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{\rho}{2(\lambda-\rho)}}, \frac{\pi}{2})$ 爲 $f(\theta)$ 的遞增區間。

$\therefore\ f(\theta) \geq f(\arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{\rho}{2(\lambda-\rho)}}) = \left(a_1^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}} + a_2^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\right)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}$.

即$a_1 b_1^\lambda + a_2 b_2^\lambda \geq (b_1^\rho + b_2^\rho)^{\frac{\lambda}{\rho}}\left(a_1^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}} + a_2^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\right)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}$。(等號成立的條件是$a_1 b_1^{\lambda-\rho} = a_2 b_2^{\lambda-\rho}$)。

4.1.2. 當$\frac{\lambda}{\rho} \in (0,1)$時, 則$(0, \arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{\rho}{2(\lambda-\rho)}})$爲$f(\theta)$的遞增區間且$(\arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{\rho}{2(\lambda-\rho)}}, \frac{\pi}{2})$ 爲 $f(\theta)$ 的遞減區間。

$\therefore\ f(\theta) \leq f(\arctan\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{\frac{\rho}{2(\lambda-\rho)}}) = \left(a_1^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}} + a_2^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\right)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}$.

即$a_1 b_1^\lambda + a_2 b_2^\lambda \leq (b_1^\rho + b_2^\rho)^{\frac{\lambda}{\rho}}\left(a_1^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}} + a_2^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\right)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}$。(等號成立的條件是$a_1 b_1^{\lambda-\rho} = a_2 b_2^{\lambda-\rho}$)

4.2. 關於 (3.3) 式的深層次的研究, 得出定理。

由於 (4.11)、(4.12) 的成立, 自然而然我們會聯想到和的式子的成立的發現。即是 (3.3) 式的深層次的研究於是有定理的產生。

4.2.1. 定理的提出:

若 $a_i, b_i \in R^+$ $(i=1,2,\ldots,n)$ $(n\geq 2)$, $\rho,\lambda\in R$,

① 當 $\dfrac{\lambda}{\rho}\in(1,+\infty)\cup(-\infty,0)$ 時, 則 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_ib_i^{\lambda}\geq\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^{p}\Big)^{\frac{\lambda}{\rho}}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\Big)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}$;

等號成立 $\Leftrightarrow a_1b_1^{\lambda-\rho}=a_2b_2^{\lambda-\rho}=\cdots=a_nb_n^{\lambda-\rho}$

② 當 $0<\dfrac{\lambda}{\rho}<1$ 時, 則 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_ib_i^{\lambda}\leq\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\rho}\Big)^{\frac{\lambda}{\rho}}\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\Big)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}$;

等號成立 $\Leftrightarrow a_1b_1^{\lambda-\rho}=a_2b_2^{\lambda-\rho}=\cdots=a_nb_n^{\lambda-\rho}$

4.2.2. 運用數學歸納法證明定理

① 當 $\dfrac{\beta}{\alpha}>1$ 時,

(1) 當 $n=2$ 時, 由 (4.11) 知不等式 $a_1b_1^{\lambda}+a_2b_2^{\lambda}\geq(b_1^{\rho}+b_2^{\rho})^{\frac{\lambda}{\rho}}\Big(a_1^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}+a_2^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\Big)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}$ 成立 (等號成立的條件是 $a_1b_1^{\lambda-\rho}=a_2b_2^{\lambda-\rho}$)

(2) 假設 $n=k$ 時, 不等式成立, 即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_ib_i^{\lambda}\geq\Big(\sum_{i=1}^{k}b_i^{\rho}\Big)^{\frac{\lambda}{\rho}}\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\Big)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}$

則當 $n=k+1$ 時,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}a_ib_i^{\lambda}&=\sum_{i=1}^{k}a_ib_i^{\lambda}+a_{k+1}b_{k+1}^{\lambda}\\
&\geq\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\Big)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}\Big(\sum_{i=1}^{k}b_i^{\rho}\Big)^{\frac{\lambda}{\rho}}+a_{k+1}b_{k+1}^{\lambda}\\
&=\left(\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\Big)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}\right)\left(\Big(\sum_{i=1}^{k}b_i^{\rho}\Big)^{\frac{1}{\rho}}\right)^{\lambda}+a_{k+1}b_{k+1}^{\lambda}\\
&\geq\left(\Big[\Big(\sum_{i=1}^{k}b_i^{\rho}\Big)^{\frac{1}{\rho}}\Big]^{\rho}+b_{k+1}^{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}}\left(\Big[\Big(\sum_{i=1}^{k}a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\Big)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}\Big]^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}+a_{k+1}^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\right)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}\text{(由(1) 知)}\\
&=\Big(\sum_{i=1}^{k+1}b_i^{\rho}\Big)^{\frac{\lambda}{\rho}}\Big(\sum_{i=1}^{k+1}a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\Big)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}
\end{aligned}$$

(其中第二個等號若且唯若 $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\right)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\rho}\right)^{\frac{\lambda-\rho}{\rho}}=a_{k+1}b_{k+1}^{\lambda-\rho}$ 成立)

綜合 (1)(2) 不等式 $p\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i^{\lambda} \geq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^{\rho}\right)^{\frac{\lambda}{\rho}}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{\rho}{\rho-\lambda}}\right)^{\frac{\rho-\lambda}{\rho}}$ 成立;

等號成立 $\Leftrightarrow a_1b_1^{\lambda-\rho}=a_2b_2^{\lambda-\rho}=\cdots=a_nb_n^{\lambda-\rho}$

至於 ②同理可證。

4.2.3. 定理的推論

推論1: (權方和不等式) 若 $x_i, y_i \in R^+$, $n, m \in N^*$ $(n \geq 2)$, 則 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^{m+1}}{y_i^m} \geq \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{m+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^{m}}$

證明: 令定理 ①中的 $\lambda=-m$, $\rho=1$, $a_i=x_i^{m+1}$, $b_i=y_i$,

即 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^{m+1}}{y_i^m} \geq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^{-m}\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i^{m+1}\right)^{\frac{1}{m+1}}\right]^{m+1}=\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^{m+1}}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\right)^{m}}$.

推論2: (Hölder不等式) 設 $a_i, b_i>0$, $i=1,2,\ldots,n$ $(n\geq 2)$, $p, q\in R$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,

若 $p>1$ 時, 則 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$;

若 $0<p<1$ 時, 則 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$。

證明: 令定理中的 $\lambda=1$, $\rho=p$,

當 $p>1$時, 由定理 ② 知

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}。$$

當 $0<p<1$ 時, 由定理 ① 知

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{p-1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}。$$

推論3: (Cauchy不等式) 設 $a_i, b_i \in R$, $i=1,2,\ldots,n$ $(n \geq 2)$,

則 $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$。

4.2.4. 定理的命名

由於楊克昌先生在1982年第6期的「數學通訊」上首次提出推論1中的權方和不等式, 而本文的定理已包含了此不等式, 且應用廣泛以及結構對稱優美, 因此稱之爲廣義的對稱權方和不等式。

5. 定理的應用

關於定理的應用, 舉不勝舉, 限於篇幅, 筆者僅列舉兩例加以說明。

5.1. 正用

例5.1.1: 設 a,b,c 爲正實數, 且滿足 $abc=1$, 試證:
$a^{-3}(b+c)^{-1}+b^{-3}(a+c)^{-1}+c^{-3}(b+a)^{-1}\ge 3/2$ (IMO$_{36}$試題)

證明: 由 $abc=1$ 及定理中的 ①知

$$\begin{aligned}
&a^{-3}(b+c)^{-1}+b^{-3}(a+c)^{-1}+c^{-3}(b+a)^{-1}\\
=&\frac{1}{a(b+c)}(b^2c^2)+\frac{1}{b(a+c)}(a^2c^2)+\frac{1}{c(b+a)}(b^2a^2)\\
\ge&\frac{(bc+ac+ab)^2}{2(ab+bc+ac)}=\frac{(bc+ac+ab)^2}{2(bc+ac+ab)}\ge\frac{3}{2}\ .
\end{aligned}$$

5.2. 逆用

例5.2.1: 實數 a,b,c,d 滿足 $2a^2+b^2+24c^2+3d^2=\dfrac{18}{5}$, 試求
$y=a+3b-2c+d$ max 及 min。

解:

$$\begin{aligned}
&2a^2+b^2+24c^2+3d^2\\
=&\frac{a^2}{\left(\frac{1}{2}\right)}+\frac{(3b^2)}{9}+\frac{(-2c)^2}{\left(\frac{1}{6}\right)}+\frac{d^2}{\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{1}{10}\left[\frac{a^2}{\left(\frac{0.5}{10}\right)}+\frac{(3b)^2}{\left(\frac{9}{10}\right)}+\frac{(-2c)^2}{\left[\frac{(\frac{1}{6})}{10}\right]}+\frac{d^2}{\left[\frac{(\frac{1}{3})}{10}\right]}\right]\\
\ge&\frac{1}{10}(a+3b-2c+d)^2\text{。 即}2a^2+b^2+24c^2+3d^2\ge\frac{1}{10}(a+3b-2c+d)^2\\
&\therefore -6\le a+3b-2c+d\le 6
\end{aligned}$$

參考文獻

1. G. 波利亞 (George Polya) 原著; 數學發現, [九章出版社] 編輯部譯, 一版, 臺北市: 九章出版; 1995 [民84] 印刷。
2. G. 波利亞著; 數學與猜想, 李心燦、王日爽、李志堯譯, 一版, 臺北市: 九章出版; 1996 [民85] 印刷。

—本文作者任教於中國陝西省西安市東方中學—