數學傳播 31卷4期, pp. 12-17

數學歸納法的證明

呂文寶

某一個星期六的早上, 我的學生小庭約我到某知名速食店, 坐定之後, 小庭就迫不急待地問: 「什麼是歸納法?」 我回答:「舉一個例子來說明: 若有一個袋子, 裏面有100顆撞球, 你從袋子中摸出第一個球是紅色, 再摸出第二個球也是紅色, 如此, ..., 一直到第20個球都是紅色, 我們心中不禁會 "猜想" (或推測) 這袋子中的100個球全部都是紅色的。(不然的話, 怎麼會那麼剛剛好連續抽20個球都是紅色的。) 這種由少數已知去 "猜想" (或推測) 全部的想法, 就叫做 "歸納法"。若我們把袋中的80個球都倒出來, 驗證我們的 "猜想" (或推測) 是否正確? (即驗證這袋中的100個球是否全部都是紅色的?) 不管驗證的結果是正確或錯誤, 這種驗證就叫做 "歸納法的證明"。」

小庭再問:「那 "數學歸納法的證明" 又是什麼呢? 」

我又回答:「再舉一個例子來說明: 以前我們學過$1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, 證明如下:

$$\begin{array}{l}
\quad\quad 1+2+3+\cdots\cdots+n=x\\
\underline{\quad n+(n-1)+(n-2)+\cdots\cdots+1=x}\\
(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots\cdots+(n+1)=2x\\
n(n+1)=2x\\
\dfrac{n(n+1)}{2}=x
\end{array}$$

以上是等式的證明, 不是數學歸納法的證明, 真正數學歸納法的證明是: 證明等式 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的 n 在所有自然數中, 等式都成立。」

小庭又問:「那要怎麼去證明等式 $1+2+3+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的 n 在所有自然數中, 等式都成立呢? 」

我說:「你可以把 "步驟一" $n=1$ 代入等式的兩邊去驗證是否相等? 即等式左邊 $=1$, 等式右邊$=\dfrac{1\times(1+1)}{2}=\dfrac{1\times 2}{2}=1$, $1=1$, 等式成立。"步驟二" $n=2$ 代入等式的兩邊去

驗證是否相等? 即等式左邊$=1+2=3$, 等式右邊$=\dfrac{2\times(2+1)}{2}=\dfrac{2\times 3}{2}=3$, $3=3$, 等式成立。請你試試看, 把 $n=3$ 代入, $n=4$代入, $\cdots\cdots$。」

小庭立刻在計算紙上寫下"步驟三" $n=3$ 代入等式的兩邊, 即等式左邊$=1+2+3=6$, 等式右邊$=\dfrac{3\times(3+1)}{2}=\dfrac{3\times 4}{2}=6$, $6=6$, 等式成立。"步驟四" $n=4$ 代入等式的兩邊, 即等式左邊$=1+2+3+4=10$, 等式右邊$=\dfrac{4\times(4+1)}{2}=\dfrac{4\times 5}{2}=10$, $10=10$, 等式成立。"步驟五" $n=5$ 代入等式的兩邊, 即等式左邊$=1+2+3+4+5=15$, 等式右邊$=\dfrac{5\times(5+1)}{2}=\dfrac{5\times 6}{2}=15$, $15=15$, 等式成立。"步驟六" $n=6$ 代入等式的兩邊, 即等式左邊$=1+2+3+4+5+6=21$, 等式右邊$=\dfrac{6\times(6+1)}{2}=\dfrac{6\times 7}{2}=21$, $21=21$, 等式成立。$\cdots\cdots\cdots$, 小庭大聲叫道:「老師, 救命啊! 這要做到什麼時候才能把所有的自然數都驗證完呢?」

我說:「因爲自然數有無限多個, 所以你用這種驗證方式, 終生你都無法驗證完, 當然, 古聖先哲也有你我這樣的困擾, 還好經過許多數學家的努力, 已幫我們想出下列好方法, 可以說明 n 在所有的自然數中, 等式都成立。說明如下: 」

"步驟一" $n=1$代入等式的兩邊, 即等式左邊$=1$, 等式右邊$=\dfrac{1\times(1+1)}{2}=\dfrac{1\times 2}{2}=1$, $1=1$, 等式成立。

"步驟二" 假設 $n=k$ 時, 等式成立, 試證: $n=k+1$ 時, 等式也成立, 即

已知: $1+2+3+\cdots\cdots\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$

求證: $1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

證明: 由已知 $1+2+3+\cdots\cdots\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$, 使用等量公理, 對等式的兩邊同加 $(k+1)$, 得 $1+2+3+\cdots\cdots+k+(k+1)=\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{k^2+k+2k+2}{2}=\dfrac{k^2+3k+2}{2}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

"步驟三" 同"步驟二"之理, 可證 $n=k+2$, $n=k+3$, $n=k+4$, $\cdots\cdots\cdots$, 等式都成立。所以我們得證 n 在所有自然數中, 等式都成立。

以上"步驟一, 步驟二, 步驟三"的證明方法, 就是"數學歸納法的證明"。

小庭很懷疑地問:「爲什麼"步驟一, 步驟二, 步驟三"的證明方法, 就能說明 n 在所有的自然數中, 等式都成立? 」

我答:「這裏用骨牌倒下去來說明: "步驟一"就好像第一塊骨牌倒下去。"步驟二"就好像如果前 k 塊骨牌都倒下去, 則第 $(k+1)$ 塊骨牌也一定會倒下去。"步驟三"就好像說明了全部骨

牌都會倒下去。」

小庭說:「我在課本看到關於不等式“數學歸納法的證明”, 有許多地方不懂, 請老師也舉一個例子來解說。」

我說:「好, 我就舉“對於每一個自然數 $n \geq 5$, 試證: $2^n > n^2$”來說明。」

證明如下:

“步驟一” $n = 5$ 代入, 不等式左邊 $2^5 = 32$, 不等式右邊 $5^2 = 25$, $32 > 25$, 不等式成立。

“步驟二” 假設 $n = k > 5$ 時, 不等式成立, 試證: $n = k + 1$ 時, 不等式也成立。即

已知: $2^k > k^2$

求證: $2^{k+1} > (k+1)^2$

證明: 由已知 $2^k > k^2$, 使用等量公理, 對等式的兩邊同乘 2,

得 $2^k \cdot 2 > 2k^2 \Rightarrow 2^{k+1} > 2k^2 \cdots\cdots\cdots$ ①

設 $2^{k+1} =$ 甲數, $2k^2 =$ 乙數, $(k+1)^2 =$ 丙數

由 ①式知甲數 > 乙數, 如果能證出乙數 > 丙數, 則由遞移律知甲數 > 丙數。即完成證明 $2^{k+1} > (k+1)^2$, 那怎麼去證明乙數 > 丙數呢? 我用下表說明:

腦中的思考活動	書寫正式證明
先假設乙數 > 丙數已成立	$k > 5 > 1$ 且 $k - 2 > 3 > 1$
$2k^2 > (k+1)^2$	$\Rightarrow k > 1$ 且 $k - 2 > 1$
$\Rightarrow 2k^2 > k^2 + 2k + 1$	$\Rightarrow k(k-2) > 1$
$\Rightarrow k^2 - 2k > 1$	$\Rightarrow k^2 - 2k > 1$
$\Rightarrow k(k-2) > 1$	$\Rightarrow 2k^2 > k^2 + 2k + 1$
$\Rightarrow k > 1$ 且 $k - 2 > 1$	$\Rightarrow 2k^2 > (k+1)^2$
$\Rightarrow k > 5 > 1$ 且 $k - 2 > 3 > 1$	

所以 $2^{k+1} > (k+1)^2$ 證畢

* 注意: 書寫正式證明正好與腦中的思考活動逆向。

小庭問:「上述表中的正式證明不能直接想出來嗎? 」

我答:「這是不可能的事情, 除非你跟神一樣絕頂聰明或你已做過這題, 而你我皆凡人, 正常人應該是在草稿紙上寫出腦中的思考活動, 再把它逆向寫出來。」

小庭又問:「請問什麼題目要用逆向思考? 」

我答:「在“數學歸納法的證明”這領域中, 除了等式之外, 其他大部分都是逆向思考。這種逆向思考的證法, 存乎一心, 有需要的時候就可以使用。記得我讀國中的時候, 遇到一位數學老師, 在證平面幾何學的證明題時, 就是從後面寫起, 再從前面寫, 最後竟合在一起證完了。當初

覺得很神奇, 也對這位老師很崇拜, 後來發現這種逆向證法, 在數學證明時常常使用, 也就覺得沒有什麼了。」

“步驟三” 同“步驟二”之理, 可證 $n \geq 5$ 時, n 在所有的自然數中, 不等式都成立。

小庭說:「我在課本看到關於整除方面“數學歸納法的證明”, 也有許多地方不懂, 請老師也舉一個例子來解說。」

我說:「好, 我再舉下例, 試證: 對每一個自然數 n, 都有 $18|(2^{2n}+24n-10)$」證明如下:

“步驟一” $n=1$ 代入, 得 $18|(2^{2\times 1}+24\times 1-10) \Rightarrow 18|4+24-10 \Rightarrow 18|18$, 整除成立。

“步驟二” 假設 $n=k$ 時, 整除成立, 試證: $n=k+1$ 時, 整除也成立。即

已知: $18|(2^{2k}+24k-10)$

求證: $18|[2^{2(k+1)}+24(k+1)-10]$

在此先複習整除的性質, 若 a, b, c, m, n 均爲整數, $a|b$ 且 $a|c \Rightarrow a|mb+nc$ (即公因數整除兩倍數的任意線性組合)

證明:

腦中的思考活動	書寫正式證明
$18 \mid [2^{2(k+1)}+24(k+1)-10]$	$18 \mid 18$
$\Rightarrow\ 18 \mid (2^{2k+2}+24k+24-10)$	$\Rightarrow\ 18 \mid 18(4k-3)$
$\Rightarrow\ 18 \mid (4\times 2^{2k}+24k+14)\cdots\cdots$ ①	$\Rightarrow\ 18 \mid (72k-54)\cdots\cdots$ ③
由已知 $18 \mid (2^{2k}+24k-10)\cdots\cdots$ ②	由已知 $\Rightarrow\ 18 \mid (2^{2k}+24k-10)$
將 ①, ②式使用 $a \mid b$ 且 $a \mid c \Rightarrow a \mid mb+nc$,	$\Rightarrow 18 \mid 4\times(2^{2k}+24k-10)$
其中取 $m=-1$, $n=4$, 得	$\Rightarrow 18 \mid (4\times 2^{2k}+96k-40)$
$18 \mid [-(4\times 2^{2k}+24k+14)$	$\Rightarrow 18|(2^{2(k+1)}+96k-40)\cdots\cdots$ ④
$+4(2^{2k}+24k-10)]$	將③, ④式使用 $a \mid b$ 且 $a \mid c \Rightarrow a \mid mb+nc$,
$\Rightarrow\ 18 \mid (72k-54)$	其中取 $m=-1$, $n=1$, 得
$\Rightarrow\ 18 \mid 18(4k-3)$	$18 \mid [-(72k-54)+(2^{2(k+1)}+96k-40)]$
$\Rightarrow\ 18 \mid 18$	$\Rightarrow 18 \mid [2^{2(k+1)}+24(k+1)-10]$ 證畢

“步驟三” 同“步驟二”之理, 可證 n 在所有的自然數中, 整除都成立。

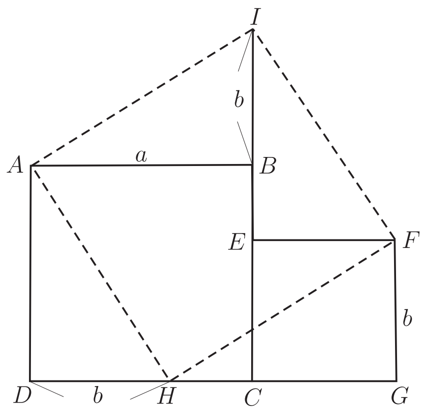
小庭說:「我在課本上看到“對每一個自然數 n, 試證: $2^{8n+2}-2^{4n}$ 的個位數字都是 8”, 不知如何證明, 請老師教我。」

我說:「$2^{8n+2}-2^{4n}-8$ 的個位數字必爲 0, 即 $10|(2^{8n+2}-2^{4n}-8)$, 你可以仿照上述證明, 便可證出來。」

小庭問:「在幾何學上, 有沒有“數學歸納法的證明” ? 」

我答:「當然有, 最著名的就是 n 個正方形經過切割, 必可重新組合成一個大正方形, n 在所有自然數中 $(n \geq 2)$, 上述都成立。」證明如下:

"步驟一" $n = 2$ 代入, "$\square$ 代表正方形, 即試證: $\square ABCD + \square EFGC = \square AHFI$ (如下圖)



設 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$, $\overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GC} = \overline{CE} = b$, 延長 $\overrightarrow{CB}$ 至 I 點, 使 $\overline{BI} = b$, 在 $\overline{DC}$ 上取一點 H, 使得 $\overline{DH} = b$, 再連接 $\overline{AH}$, $\overline{HF}$, $\overline{FI}$ 與 $\overline{IA}$

求證: 四邊形 $AHFI$ 為正方形

證明: 因爲 $\triangle ADH \cong \triangle HFG \cong \triangle IEF \cong \triangle ABI$ (SAS全等, a 直角 b)

所以 $\overline{AH} = \overline{HF} = \overline{FI} = \overline{IA}$ (對應邊), 得四邊形 $AHFI$ 爲菱形, 在 $\triangle ADH$ 中, $\angle ADH + \angle DHA + \angle HAD = 180°$, $\angle ADH = 90°$, $\angle DHA + \angle HAD = 90°$, 因爲 $\triangle ADH \cong \triangle HGF$, 所以 $\angle HAD = \angle FHG$ (對應角), 代換得 $\angle DHA + \angle FHG = 90°$, 又因 $\angle DHA + \angle AHF + \angle FHG = 180°$ (一直線), 代換得 $90° + \angle AHF = 180°$, 移項得 $\angle AHF = 90°$, 所以四邊形爲正方形, 證畢。

* 實際操作: 將 $\triangle ADH$ 切割下來補在 $\triangle ABI$, $\triangle HGF$ 切割下來補在 $\triangle IEF$, 即形成大正方形 $AHIF$, 所以就有 $\square ABCD + \square EFGC = \square AHFI$

* 結論: 兩正方形經切割必可重新組合成一個大正方形。

"步驟二" 假設 $n = k$ 成立, 試證: $n = k + 1$ 也成立 , 即

已知: $\square A_1B_1C_1D_1 + \square A_2B_2C_2D_2 + \square A_3B_3C_3D_3 + \cdots\cdots + \square A_kB_kC_kD_k$
$= \square JKLM$

求證: $\square A_1B_1C_1D_1 + \square A_2B_2C_2D_2 + \square A_3B_3C_3D_3 + \cdots\cdots + \square A_kB_kC_kD_k$
$+ \square A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k_1} = \square NOPQ$

證明:

由已知 $\square A_1B_1C_1D_1+\square A_2B_2C_2D_2+\square A_3B_3C_3D_3+\cdots+A_kB_kC_kD_k=\square JKLM$
使用等量公理對等式兩邊同加 $\square A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}$ 得
$\square A_1B_1C_1D_1+\square A_2B_2C_2D_2+\square A_3B_3C_3D_3+\cdots+\square A_kB_kC_kD_k+\square A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}$
$=\square IKLM+A_{k+1}B_{k+1}C_{k+1}D_{k+1}=\square NOPQ$ (由“步驟一”知)

“步驟三” 同“步驟二”之理, 可得 n 個正方形經過切割必可重新組合成一個大正方形, n 在所有自然數中 $(n\geq 2)$, 上述都成立。

小庭說:「在“步驟一”中, 圖形的輔助線是誰想出來的, 好神奇噢! 」

我說:「這是淸初數學家梅文鼎先生想出來的, 這是中國人的光榮! 爲什麼? 我們試想淸初那個時代, 幾乎是所有的知識份子都在讀四書五經, 準備八股科舉, 對於數學可以說冷門到嗤之以鼻。而梅文鼎出生距利馬竇與徐光啓合繹“幾何原本”的出版才不到三十年, 以當時的時空環境, 能想出輔助線, 並在數學史上佔有一席之地, 這令我們不得不佩服梅文鼎先生的智慧! 講到這裏, 我們身爲中國人應該更有自信才對! 」

最後小庭非常高興地與我一起走出速食店, 我聽到小庭一直都小聲哼著 You light up my life 的調子。(全文完)

後記

這是一篇高中教材教法的作品, 希望能拋磚引玉, 鼓勵更多高中數學老師能把自己的教學智慧寫出來, 如此, 我們數學老師才能一代薪傳一代, 我們的數學教學才會不斷地進步, 我們也才能一代比一代強!

—本文作者任教於大直高中—