數學歸納法的邏輯基礎

——為高中生寫的

葉 東 進

數學有一個特色——抽象——抽取諸事象間的共同特徵，由於這個特色，數學的結論才顯出它應用的廣泛。因此學習從個別的結果中歸納出一般性的結論無疑是必要的。但所謂歸納出一般性的結論並不是單從幾個特例的成立就下結論說一般的情形下也成立，而是必須予以證明的。這種一般性的結論常以定理或公式的形式出現。為得到一般性的結論，數學發展出許多它獨特的方法，其中之一就是數學歸納法。

為便於說明，先作一個試驗:

在平面上畫一條直線，顯然的，它將平面分割成區域的數目 $a_1=2$（如圖一）。其次，在平面上畫二條直線，顯然的，它們將平面分割成區域的最大數目 $a_2=4$（如圖二）。

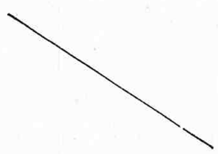

圖 一

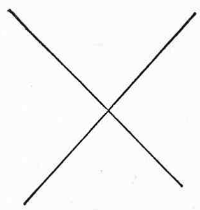

圖 二

另外，在平面上畫三條直線，可以看出，它們將平面分割成區域的最大數目 $a_3=7$（如圖三）。又如果在平面上畫四條直線，可以算出，它們將平面分割成區域的最大數目 $a_4=11$（如圖四）。

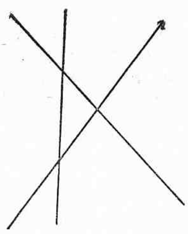

圖 三

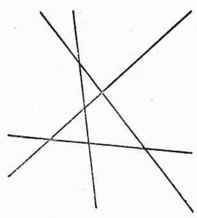

圖 四

試驗做到此，你可能關心當直線是五條，六條，七條，……等的結果，這時你可能依據上述四種情形的結果而作這樣的整理:

直線一條時，$a_1=2=1+1$。

直線二條時，$a_2=4=a_1+2=1+1+2$。

直線三條時，$a_3=7=a_2+3=1+1+2+3$。

直線四條時，$a_4=11=a_3+4=1+1+2+3+4$。

並進一步猜測:

直線五條時，$a_5=16=a_4+5=1+1+2+3+4+5$。

…………

一般，n 條時，$a_n=a_{n-1}+n=1+1+2+3+\cdots+n=1+n(n+1)/2$。

為了驗證你的猜測，你可能再做直線為五條，六條，七條時的試驗，試驗的結果與你的猜測相合。因此你對自己的猜測感到自信，甚至肯定它是無疑的。問題是：你如何能肯定說一般當直線為 n 條時，a_n 一定是 $1+n(n+1)/2$？憑什麼？你可能回說：$n=1$，2，3，4，5，6 時不是都對了嗎？甚至 $n=8$ 時試驗的結果跟直接以 $n=8$ 代入 $1+n(n+1)/2$ 所得之值也相合，這不就對了嗎？我反問：那麼 $n=100$ 時，你如何知道也是對的？你可能會說：這還不簡單!？在平面上畫一百條直線試驗就是了。我想你還是先慢說大話，因為要在平面上畫一百條直線，然後數出它們分割平面成區域的最大數目幾乎是辦不到的，對不!？因此每次光是靠試驗來驗證你的猜測，這種做法，說真的，實在不是"數學的方法"。但是我敢說：不必用試驗就可證明：不論 n 取多大的值，a_n 一定等於 $1+n(n+1)/2$。它便是數學歸納法!

本文旨在闡明數學歸納法的邏輯基礎，因此就以上述例子，先寫出數學歸納法證明的一般程序，再予以分析說明。

要證明平面上畫出 n 條直線，它們將平面分割成區域的最大數目是 $a_n=1+n(n+1)/2$。

證：當 $n=1$ 時，一條直線將平面分割成 2 個區域，因此 $a_1=2$，另外，$1+2\cdot 1/2=2$，故 $n=1$ 時成立。設 $n=k$ 時成立，即設 k 條直線將平面分割成區域的最大數目是 $a_k=1+k(k+1)/2$。今平面上 $k+1$ 條直線欲分割平面成最多區域時，可取其中 k 條直線使其分割成最多區域數 $1+k(k+1)/2$，然後讓第 $k+1$ 條直線跟前述的 k 條直線均相交，此時，便將剛才分割的 $1+k(k+1)/2$ 個區域多分割出 $k+1$ 個區域來，因此總共分割成

$$1+\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

個區域，即

$$a_{k+1}=1+(k+1)(k+2)/2。$$

因此，$n=k+1$ 時也成立。（證畢）

上述便是數學歸納法證明的一般程序，這樣的程序含有兩個步驟：

(1)是驗證 $n=1$ 時是否成立。

(2)是假設 $n=k$ 時成立，看看 $n=k+1$ 時是否也成立。

而利用數學歸納法證明一般成立乃是指上列兩個步驟的結論均為肯定，即

對一般 n 成立時 $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} (1)\ n=1 \text{ 時務必成立。} \\ (2)\text{ 假設 } n=k \text{ 時成立，必定要能推出 } n=k+1 \text{ 時也成立。} \end{cases}$

對於初學的人而言，常見下列三點疑問：

(i) 為什麼一定要驗證 $n=1$ 時成立？缺了這步驟有何理論上的缺失？

(ii) 假設 $n=k$ 時成立而推出 $n=k+1$ 時成立，這命題本身的意義為何？

(iii) 為何肯定了上述兩個步驟的結論便是證明了對任何自然數 n 而言，一般均成立？

針對上述三點疑問，說明如下：

我們知道一個有效命題：若 p 則 q 為眞的意思是：假如 p 是成立的，那麼必定 q 也是成立。但在另外一方面，一個命題：若 p 則 q，要是 p 是不成立的，那麼 q 成立也好，不成立也好，我們都說這個命題是眞的，當然，你可能覺得這樣子的命題很無聊。不錯！因為當我們說命題：若 p 則 q 是眞的，且已知 p 是不成立的，這時根本無法推知 q 倒底是成立抑或不成立，雖說這個命題是眞的，但我們竟然無法從這個眞命題中得出任何肯定的結論，因此這個命題雖眞，卻是無效的。

有了上面的說法，現在回頭來看數學歸納法證明的第(2)步驟：假設 $n=k$ 時成立，看看 $n=k+1$ 時是否也成立，如果這個命題被證明為眞，那便是說：如果 $n=1$ 時成立的話，$n=2$ 時就成立；如果 $n=2$ 時成立的話，$n=3$ 時就成立；……，換個角度說，譬如想知道 $n=100$ 時是否成立，只要先看看 $n=99$ 時是否成立；如果 $n=99$ 時是成立的，那麼 $n=100$ 時就成立無疑，但 $n=99$ 時是否成立呢？那只要先看看 $n=98$ 時是否成立；如果 $n=98$ 時是成立，那麼 $n=99$ 時就成立無疑，但 $n=98$ 時是否成立呢？那也只要先看看 $n=97$ 時是否成立，……這樣一直推下去的話，最後一定會觸及到這個問題：$n=1$ 時是否成立？如果不能確定 $n=1$ 時是成立的，便就無法肯定“若 $n=1$ 時成立，則 $n=2$ 時也成立”這個眞命題的有效性，這便等於說無法確定 $n=2$ 時是成立的；接着把這個道理同樣地用在眞命題“若 $n=2$ 時成立，則 $n=3$ 時也成立”上，也就無法確定 $n=3$ 時是成立的，這樣繼續地說下去便得到一個結論：不論 n 取值多少，我們均無法確定此時是否成立。由此可以看出：驗證 $n=1$ 時是成立的這件事情對於步驟(2)中的命題的有效推演作了相當保證的基礎，也就是說光是有步驟(2)中的眞命題，而無 $n=1$ 時的成立作基礎，那麼這個眞命題是空的，於事無濟的，因為它無法有效地推演出任何結論。

另外，如果有了 $n=1$ 時成立這件事作基礎，並且命題：“若 $n=k$ 時成立，則 $n=k+1$ 時也成立，其中 k 為任意自然數”也被證明為眞，那麼無疑的，要證明 $n=100$，或 $n=1000$，或 n 是任何一個自然數時都是成立便是輕易的事情：只要我們多次的利用這個命題：若 $n=k$ 時成立，則 $n=k+1$ 時也成立的有效推演便行。這便解答了上面所提的第 (iii) 個疑問。

數學歸納法的原意便是如此，沒有什麼複雜或艱難的道理在裏面，如果把它平凡的道理改寫成下面這句話，你是否瞭解與同意呢？

「任何一自然數 n，均可由 1 開始，經有限次“$+1$”運算而得，換句話說，由 1 開始，逐次“$+1$”即可得到任一自然數。」