數學傳播 34卷3期, pp. 34-38

“競賽”——探究

～ 一堂競賽課的實錄

王 聖

前幾天的一堂數學競賽課上, 原本安排了詳細的計畫, 內容充分。 在講解第一道不等式習題的時候, 需要用到: $x, y\in R$, $\dfrac{x^2+y^2}{2}\geq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$ 的結論, 也沒想那麼多, 直接給出, 因爲上競賽課的同學, 基礎都較好, 應該不會有什麼問題, 哪知道坐在前排的一個同學一個小聲的嘀咕, 卻改變了整堂課的進程, 特與朋友們一起分享:

[**同學**1] (小聲嘀咕) 給的不等式這麼巧, 未知量前面都是 $\dfrac{1}{2}$, 和爲 $1\cdots$ 。

說者無心, 聽者有意, 明顯的感覺到周圍的同學也聽見了同學1的小嘀咕。因此, 我也沒有急著往下講解, 順勢:「剛才同學1在下面產生了疑問, 爲何左右兩邊的未知量的係數都是 $\dfrac{1}{2}$, 而且和是 1, 請同學們思考思考這個問題。」

話音剛落, 平時比較喜歡思考的一位同學舉起了手。

[**同學**2]: (舉手站起來了) 按照如此說法的話, 假設係數不像上面都等於 $\dfrac{1}{2}$, 而只要求兩個係數和等於 1的時候是否也成立呢? 即有 $m, n\in R^+$, $m+n=1$, 使得

$$mx^2+ny^2\geq(mx+my)^2. \tag{1}$$

下面不禁發出嘖嘖的讚歎聲, 也有同學表示懷疑。

「很好,」我立刻給予了表揚,「不論是否對錯, 敢於做出這樣的猜想, 確實很棒。那下面我們看看, 這個猜想對麼?」下面歸於平靜, 只有沙沙的筆摩擦著紙的聲音。「打斷一下, 有哪位同學願意到黑板上來做出你的結論呢?」不久, 同學3給予我回應。

[**同學**3]: 因爲三角函數當中有 1的代換, 我也大膽的模仿這個方法, 如下

$$m+n=1,$$

$$\begin{aligned} mx^2+ny^2 &= (m+n)(mx^2+ny^2) \\ &= m^2x^2+n^2y^2+mn(x^2+y^2) \\ &\geq m^2x^2+n^2y^2+mn(2xy) \\ &= (mx+ny)^2, \end{aligned}$$

同學2的猜想是正確的。剛剛解答完畢, 同學4立刻舉手, 我示意同學3回到座位。

「同學3的證明很漂亮, 同學4好像有話要說。」我說道。

[**同學**4]: 兩個未知量 不等式成立, 不知道擴大到 3個元素是否也成立呢?

$$p、q、r \in R^+,\ p+q+r=1,\quad px^2+qy^2+rz^2 \geq (px+qy+rz)^2 \tag{2}$$

式子是否成立呢?

[**師**]: 同學們思考思考, 這個命題是否爲眞命題呢?

[**生**5]: 那我來試試:

$$\begin{aligned} &(p+q+r)(px^2+qy^2+rz^2) \\ &\quad = p2x^2+q^2y^2+r^2z^2+pqy^2+prz^2+pqx^2+qrz^2+prx^2+qry^2 \\ &\quad = p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2+(pqy^2+pqx^2)+(prz^2+prx^2)+(qrz^2+qry^2) \\ &\quad \geq p^2x^2+q^2y^2+r^2z^2+2pqxy+2prxz+2qryz \\ &\quad = (px+qy+rz)^2 \end{aligned}$$

[**師**]: (帶頭鼓掌) 課堂發展到此程度, 我也順水推舟, 把原有的教學計畫停下來。同學5的探索精神值得我們學習。

[**生**6]: 能否推廣到更多元素呢? (跟著後面, 就有同學提出來, 課堂的氣氛進入了小高潮。) 即 $\forall a_i \in R^+\ (i=1,2,\ldots,m)$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$, 則

$$\sum_{i=1}^{m} a_i{x_i}^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{m} a_ix_i\right)^2 = \cdots\cdots \tag{3}$$

[**師**]: 很好, 有人想挑戰麼? 下面會意的一片笑聲。

[**生**7]: 老師, 我來嘗試: 模仿上面的證明方法, 展開之後運用均值不等式應該可以證明, 前不久我剛研究過柯西不等式, 此處給出一個較爲簡單的證明, 如下:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i{x_i}^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\sqrt{a_i}\right)^2 \sum_{i=1}^{m}\left(\sqrt{a_i}x_i\right)^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{m}\sqrt{a_i}\sqrt{a_i}x_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{m} a_ix_i\right)^2.$$

下面一陣躁動, 更多的給出是讚歎與欣賞, 我及時的加以了表揚與鼓勵。

[生8]: 老師, 同學們, 對不起, 我打斷一下, 剛才同學2在給出 (1) 式時候, 我就在想 $m+n=1$ 的條件很強, 而同學3給我們的證明給了我一定的啓示, 我把 (1) 變爲 $m,n\in R^+$, 使得

$$(m+n)(mx^2+ny^2)\ge(mx+ny)^2,\tag{4}$$

此式子經過證明是眞命題, 我就在想此結論能否往更高次方上推廣呢?

[師]: 此問題思考的很好, 下面我們一起研究研究這個問題, 下面頓時安靜了下來。

[生9]: 我一開始猜想 $m,n\in R^+$, 使得 $(m+n)(mx^3+ny^3)\ge(mx+ny)^3$, 但此式左右兩邊參量次數不一致, 可以猜想如下:

$$m,n\in R^+,\quad \text{使得}\quad (m+n)^2(mx^3+ny^3)\ge(mx+ny)^3,\tag{5}$$

證明如下:

$$\begin{aligned}
&(m+n)^2(mx^3+ny^3)\\
&\quad=(m^2+2mn+n^2)(mx^3+ny^3)\\
&\quad=m^3x^3+n^3y^3+(m^2ny^3+m^2nx^3+m^2nx^3)+(mn^2y^3+mn^2y^3+mn^3x^3)\\
&\quad\ge m^3x^3+n^3y^3+3\sqrt[3]{m^2ny^3\times m^2nx^3\times m^2nx^3}+3\sqrt[3]{mn^2y^3\times mn^2y^3\times mn^3x^3}\\
&\quad=m^3x^3+n^3y^3+3m^2nx^2y+3mn^2xy^2\\
&\quad=(mx+ny)^3,
\end{aligned}$$

此猜想得證實。

[師]: ......

剛要開口作點評價與引導, 就被同學打斷了。

[生10]: 和上面類似 $m,n\in R^+$, $p\in N^*$ 使得

$$(m+n)^{p-1}(mx^p+ny^p)\ge(mx+ny)^p,\tag{6}$$

不知道對不對?

下面學生出現躁動, 議論聲紛紛, 課堂達到了白熱化的程度。

[師]: 很好, 此命題是不是眞命題呢?

[生11]: $p \in N^*$, 能考慮用數學歸納法證明麼?

[師]: 好思路, 有同學願意上來嘗試麼?

[生12]: 我來嘗試, $p=1$ 顯然成立。
假設當 $p=k$ 時命題成立, 即 $(m+n)^{k-1}(mx^k+ny^k) \geq (mx+ny)^k$。
則當 $p=k+1$ 時,

$$\begin{aligned}&(m+n)^k(mx^{k+1}+ny^{k+1})\\ &\quad =(m+n)^{k-1}(mx^k+ny^k)(m+n)\frac{mx^{k+1}+ny^{k+1}}{mx^k+ny^k},\end{aligned}$$

此時只需證明 $(m+n)\dfrac{mx^{k+1}+ny^{k+1}}{mx^k+ny^k} \geq mx+ny$, 即

$$(m+n)(mx^{k+1}+ny^{k+1}) \geq (mx+ny)(mx^k+ny^k).$$

下面證明上式成立:

$$\begin{aligned}&(m+n)(mx^{k+1}+ny^{k+1})-(mx+ny)(mx^k+ny^k)\\ &\quad =mn(x^{k+1}+y^{k+1}-xy^k-x^ky)=mn(x-y)(x^k-y^k),\end{aligned}$$

$x-y$ 與 x^k-y^k 符號顯然相同, 故

$$\begin{aligned}&mn(x-y)(x^k-y^k) \geq 0\\ &\quad \Rightarrow (m+n)(mx^{k+1}+ny^{k+1})-(mx+ny)(mx^k+ny^k) \geq 0,\end{aligned}$$

即當 $p=k+1$ 時命題也成立, 由上述可知道, 原命題成立。

[師]:「漂亮。」(全班鼓起了雷鳴般的掌聲)

[生13]:「老師, 您看, (3)、(6) 兩者之間有什麼關聯? (3) 式項數多, 而 (6) 式指數高。」

疑問聲, 稱讚聲 ⋯⋯

[師]:「生13觀察的很仔細, 下面我們一起分析, 能否把 (3)、(6) 結合起來呢?」

下面一片寂靜, 衆生思考著。

觀察上述式子, 我在黑板上嘗試著寫下:

$$a_i \in R^+,\ x_i \in R,\ (i=1,2,\ldots,m),\ n \in N^*,\ \left(\sum_{i=1}^m a_i\right)^{n-1}\sum_{i=1}^m(a_ix_i^n) \geq \left(\sum_{i=1}^m a_ix_i\right)^n.$$

鈴— 下課鈴聲響起。

[師]:「同學們, 我嘗試著綜合 (3)、(6) 得出上述結論, 請同學們判斷是眞還是假, 若是眞, 請同學們嘗試證明, 若是假, 請舉出反例, 下節課我們再加以研究。」

反思: 整節課把一開始所給的不等式從兩條路加以推廣, 一條路從項數增加的角度加以推廣, 另一方面從指數增加的角度加以推廣, 並沒有涉及多高深的數學知識, 也沒有多麼偉大的發明創造, 或許如此的結論早已被人研究出來了, 但對於我的學生和我來說, 無疑是一次原創性的創造, 何嘗不是一種快樂呢? 這樣一堂課是一堂探索的課, 在探索的過程中體驗數學的魅力, 學生自主學習, 合作交流有機的結合起來, 也是我在傳統競賽教學模式中有益的補充。

—本文作者任教安徽滁州中學—