數學傳播 35卷3期, pp. 50-63

什麼是負正則連分數?
—— 漫談 Reg 與 Neg

張家麟 · 鄭曉暉

摘要: 本文將從如何構作實數的正則連分數 (Reg) 表示式出發, 告訴讀者什麼是「負正則連分數」(Neg)。我們將討論負正則連分數的構作, 其表達式的性質, 以及 Reg 與 Neg 表示式之間的關係。最後, 我們討論有理數及無理數的 Neg 表示, 它與 Reg 表示類似, 有著相同的特性。

1. 從構作正則連分數談起

1.1. 正則連分數

本文是一個數學學與教的經歷[1], 我們先由正則連分數談起 ...

連分數是數論的一個重要分支, 幾乎所有入門的數論書籍都會介紹連分數的理論 (可參閱: [10], [3], [6] 及 [9])。連分數是指形如:

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ddots+\cfrac{b_\ell}{a_\ell+\ddots}}}} \tag{$*$}$$

[1]註: 作者們感謝蕭文強及黃毅英兩位教授的鼓勵及寶貴意見!

的“繁分數” 表達式[2], 其中 a_i 及 b_i 可爲有理數, 實數或複數。

定義 1. 在連分數表達式 $(*)$ 中, 若

(a) 對所有的i, 有$a_i \in \mathbb{Z}$, 且 $b_i = 1$ 及

(b) $a_i > 0$ 對 $i \geq 1$ 成立時,

則稱此連分數爲正則連分數(regular continued fraction) 或簡單連分數 (simple continued fraction)。若表達式只有有限項, 則稱此連分數爲有限連分數, 否則, 爲無限連分數。數論學者會用英語簡稱 Reg 來表示正則連分數。

記號 1. Reg 除了上述的記號外, 還可以 $[a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_\ell, \cdots]$ 表示[3]。

例子 1.

$$\frac{105}{38} = 2 + \frac{29}{38} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{9}{29}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{9}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}.$$

或

$$\frac{105}{38} = [2, 1, 3, 4, 2]。$$

此處, 我們可觀察到, 求有理數的 Reg 表示[4]與歐幾里得算法 (Euclidean Algorithm) 有著不可分的關係, 即在輾轉相除的過程中, 求得的商就順次對應著在正則連分數表示中的a_i:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
2 & 105 & 38 & 1 \\
 & 76 & 29 & \\ \cline{2-3}
3 & 29 & 9 & 4 \\
 & 27 & 8 & \\ \cline{2-3}
2 & 2 & 1 & \\
 & 2 & & \\ \cline{2-3}
 & 0 & &
\end{array}
\qquad
\begin{aligned}
105 &= 38 \cdot \boxed{2} + 29; \\
38 &= 29 \cdot \boxed{1} + 9; \\
29 &= 9 \cdot \boxed{3} + 2; \\
9 &= 2 \cdot \boxed{4} + 1; \\
2 &= 1 \cdot \boxed{2} + 0.
\end{aligned}$$

---

[2]註: 還可寫成 $a_0 + \frac{b_1}{a_1+} + \frac{b_2}{a_2+} + \cdots + \frac{b_\ell}{a_\ell+} + \cdots$ 的形式。

[3]註: 還可用$[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_\ell, \cdots]$ 來表示 Reg, 以突顯整數部分。

[4]註: 一般而言, 表示並不唯一: 例如$[2, 1, 3, 4, 2] = [2, 1, 3, 4, 1, 1]$

這容易教人聯想到連分數的概念可能早在公元前 300 年, 古希臘人發展歐幾里得算法時, 便已出現, 可是, 至今人們卻仍沒有找到有力的證據去支持這個想法。事實上, 我們知道有關最早的連分數文獻, 是出現在印度數學家阿利亞伯哈塔 (Aryabhate) 的著作中, 他大約死於公元 550 年 (參閱 [4], pp187-188.)。連分數的一些概念還散見於往後的阿拉伯和希臘的著作中。大多數權威認爲連分數的近代理論開始於意大利人R. 蓬貝利 (Rafael Bombelli)(1526-1537), 他在他的代數著作 (1572) 中, 曾利用連分數作爲根式 $\sqrt{2}$ 的近似值(參閱 [4], pp.254-256.)。

其後英國數學家 J. 瓦里斯(John Waillis) 在 1655 年發表的無窮小算術 (Arithmetica Infinitorum) 一書中敍述了一般連分數的漸近分數的許多初等性質, 其中包括它們的構成法則。他在書中第一次使用了"連分數"這一術語。荷蘭數學家、科學家 C. 惠更斯 (Christian Huygens) (1629-1695) 也曾利用連分數爲天文館的齒輪設計, 給出一個好的近似, 有關的論文是在他去世後於 1698 年發表的。此後, 像歐拉 (L. Euler)(1707-1783), 蘭伯特 (J.H.Lambert)(1728-1777), 拉格朗日 (Lagrange)(1736-1813) 等大數學家, 以及其他許多數學家發展了連分數的理論。歐拉的重要論文連分數 (De Fractionibus Conitinius)(1737) 爲連分數的現代理論奠下了基礎。今天, 連分數的理論在很多科學領域中起著重要的作用 (參閱 [9], [8]), 有興趣連分數歷史發展研究的讀者, 還可參閱 Knorr 及 Fowler 的著作([5], [2])。

1.2. Reg 的構作

一般而言, 要得出任一實數 ϑ 的 Reg 表示式, 可通過以下所提供的方法進行構作。對任可實數 ϑ, 遞歸地構作序列 a_0, a_1, a_2, $\cdots$ 如下:

1. 當 $i=0$, 取 $\vartheta_0=\vartheta$;
2. 取 $a_i=\lfloor\vartheta_i\rfloor$;
3. 若 $\vartheta_i\in\mathbb{Z}$, 則構作終止, 令 $a_i=\vartheta_i$;
4. 若 $\vartheta_i\notin\mathbb{Z}$, 則構作
$$\vartheta_{i+1}=\frac{1}{\vartheta_i-a_i};$$
5. 重覆 2-4 的構作。

在上述定理中, 記號 $\lfloor x\rfloor$ 表示 x 的最大整數部份, 即 $\lfloor x\rfloor\in\mathbb{Z}$ 且有 $\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+1$。

備註 1. 注意, 這樣構作的 Reg 表示是唯一的。同時, 在 Reg 的構作中, 當 $\vartheta_i\notin\mathbb{Z}$ 時, $0<\vartheta_i-\lfloor\vartheta_i\rfloor<1$ 保證了 $y=\dfrac{1}{\vartheta_i-a_i}>1$, 從而有 $a_{i+1}=\left\lfloor\dfrac{1}{\vartheta_i-a_i}\right\rfloor\ge 1,\ i\ge 0$。

容易看出, 應用歐幾里得算法求有理數的 Reg 表示式時, 輾轉相除過程中所得的商, 就是取 $\lfloor x \rfloor$, 其中 x 爲每次對應的分數(= 被除數/除數)。

對無理數而言, 上述構作所得的序列將是一無窮序列, 下列定理保證了對應的 Reg 表示式的收斂性。

定理 1. 若 ϑ 爲無理數, 則上述方法構作出的序列是無窮序列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ 且有

$$\vartheta = [a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k, \cdots]$$

且表示式是唯一的。

(證明: 參閱[6], Chapter 12。)

熟知的無理數的 Reg 表示[5]例子有:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots] = [\,1, \overline{2}\,]; \\ \text{黃金比: } \frac{1+\sqrt{5}}{2} &= [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots] = [\,\overline{1}\,]; \\ \pi &= [3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, \ldots]; \\ e &= [2, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \ldots]。 \end{aligned}$$

事實上, 更可進一步證明:

定理 2. 一實數爲

1. 有理數當且僅當它的 Reg 表示是有限的;
2. 無理數當且僅當它的 Reg 表示是無限的。

(證明: 參閱[6], Chapter 12。)

1.3. 有趣的提問

去年, 當在數論課堂上講授這 Reg 的構作時, 有趣的問題來了, 學生在堂上忽發一問。

提問: 不用 $\lfloor x \rfloor$, 改用 $\lceil x \rceil$ 會有什麼後果?

這裡, 記號 $\lceil x \rceil$ 表示大於或等於 x 最小整數, 即 $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ 且有 $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$。學生的問題十分有意義, 我們注意到 與

$$x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)$$

[5]註: 我們沿用表示循環數串的記號。

相類似, 有

$$x = \lceil x \rceil - (\lceil x \rceil - x),$$

我們可應用這關係式來構作一種「另類」連分數!

例子 2. 應用 $\lfloor x \rfloor$, 有

$$\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = [3, 7]。$$

但在改用$\lceil x \rceil$後, 則有

$$\frac{22}{7} = 4 - \frac{6}{7} = 4 - \cfrac{1}{\frac{7}{6}} = 4 - \cfrac{1}{2 - \frac{5}{6}} = 4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{\frac{6}{5}}} = 4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \frac{4}{5}}} = \cdots$$

$$= 4 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2}}}}}}$$

注意這「另類」連分數的繁分數表示式中, $b_i = -1,\ \forall i$, 這使得原來在正則連分數表示式中的 $+$ 變作 $-$, 新的 $a_i \in \mathbb{Z},\ \forall i$, 故此, 我們嘗試引入記號:

記號 2.

$$(a_0, a_1, a_3, \cdots a_\ell, \cdots) = a_0 - \cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \ddots - \cfrac{1}{a_\ell - \ddots}}}} \qquad (**)$$

應用記號 $(**)$, 上方的結果可表示爲

$$\frac{22}{7} = (4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)。$$

例子 3.

$$\sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots] = [1, \overline{2}]$$

改用$\lceil x \rceil$後, 有

$$\sqrt{2}=(2,2,4,2,4,2,4,\ldots)=(2,\overline{2,4})。$$

同理

$$\begin{aligned}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&=(2,3,3,3,3,3,3,\ldots)=(2,\overline{3});\\ \pi&=(4,2,2,2,2,2,2,17,294,3,4,5,\ldots);\\ e&=(3,4,3,2,2,2,2,2,3,8,3,2,2,2,2,2,2,2,2,2,3,12,\ldots)。\end{aligned}$$

嘗試了上面的例子, 我們還可看到 $a_i \geq 2$, $i \geq 1$, 更重要的一點是教師與學生在討論中, 學生有以下進一步的提問。

- **提問一**

  「另類」連分數的繁分數表示式與正則連分數的表達式有何關係?

- **提問二**

  從上面的例子來看,「另類」連分數的繁分數表示式中有很多連續出現的2, 它們的出現是偶然的嗎?

學生有意義的提問, 引發教師及同學進一步的探究, 以下是我們的探究結果!

2. Reg 與 Neg

翻查連分數的文獻, 對上方「另類」連分數的表達式均未見提及。幸得第二作者的博士論文導師, 著名數學家 Richard K. Guy 教授[6]的指點, 才知道這「另類」連分數稱爲「負正則連分數」(negative regular continued fraction)。與 Reg 一樣, 連分數的行內人一般簡稱負正則連分數爲 Neg。

2.1. 負正則連分數的定義及其構作

定義 2. 在連分數表達式 $(*)$ 中, 若

1. $b_i=-1$, $i\geq 0$;

2. $a_i\in\mathbb{Z}$, $i\geq 0$;

[6]註: 數論名著: Unsolved Problems in Number Theory 的作者。

3. $a_i \geq 2,\ i \geq 1,$

則稱這連分數爲負正則連分數(Neg)。我們將繼續應用(∗∗)的記號來表示 Neg:

$$(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_\ell, \cdots)。$$

2.2. Neg 的構作

對任可實數 θ, 遞歸地構作序列 $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots$ 如下:

1. 當 $i = 0$, 取 $\theta_0 = \theta$;
2. 取 $a_i = \lceil \theta_i \rceil$;
3. 若 $\theta_i \in \mathbb{Z}$, 則構作終止, 令 $a_i = \theta_i$;
4. 若 $\theta_i \notin \mathbb{Z}$, 則構作
$$\theta_{i+1} = \frac{1}{a_i - \theta_i};$$
5. 重覆 2-4 的構作。

備註 2. 注意, 與 Reg 的構作類似, 這樣構作的 Neg 表示是唯一的[7]。同時, 在 Neg 的構作中, 當 $\theta_i \notin \mathbb{Z}$ 時, $0 < \lceil \theta_i \rceil - \theta_i < 1$ 保證了 $y = \dfrac{1}{a_i - \theta_i} > 1$, 從而有 $a_{i+1} = \left\lceil \dfrac{1}{a_i - \theta_i} \right\rceil \geq 2,\ i \geq 0$。

細心的讀者自然會問, 若上述構作所得的序列是一無窮序列, 它對應的 Neg 表示式會否收斂? 對此, 下列的定理保證了它的收斂性:

定理 3. (Śleszyński-Pringsheim 定理) 在一般無窮的連分數 (∗) 表示式中, 若對於所有的 $i \geq 1$,
$$|a_i| \geq |b_i| + 1$$
成立, 則連分數表示式收斂。

(證明: 參閱[7], pp.30-32。)

在 無窮 Neg 中, $|b_i| + 1 = |-1| + 1 = 2 \leq |a_i|$ 對所有 $i \geq 1$ 成立, 故無窮 Neg 表示式收斂。

要爲提問一及二尋求解答, 我們需要引進以下記號。

記號 3. 爲方便起見

[7]註: 一般而言, 表示並不唯一: 例如 $(4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) = (4, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 1)$, 但後者不會在上述的構作中發生。

- 對於 Reg, 我們會以 $[a_0, a_1, \ldots, y]$ 來表示計算中的表示式, 其中 $y \in \mathbb{R}$ 及 $y \geq 1$;
- 同理, 對於 Neg , 我們會以 $(a_0, a_1, \ldots, y)$ 來表示計算中的表示式, 其中 $y \in \mathbb{R}$ 及 $y \geq 1$;
- 此外, 對 $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$ 及 $y \geq 1$, 我們以 (a_0, τ^n, y) 記 $(a_0, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n}, y)$。當 $n = 0$, 我們有 $(a_0, \tau^0, y) = (a_0, y)$。

引理 1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $y \geq 1$,

$$\begin{cases} (\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n}) = \dfrac{n+1}{n}; \\ (\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n}, y) = \dfrac{(n+1)y - n}{ny - (n-1)}。 \end{cases}$$

證明. 取$y = 2$, 首部分命題是次部分命題的直接推論。對次部分命題, 當 $n = 1$, 有

$$(2, y) = 2 - \frac{1}{y} = \frac{2y - 1}{y}。$$

假設命題對 $n \in \mathbb{N}$ 成立

$$(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n}, y) = \frac{(n+1)y - n}{ny - (n-1)},$$

則

$$(\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n+1}, y) = (2, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{n}, y) = (2, \frac{(n+1)y - n}{ny - (n-1)}),$$

即

$$2 - \frac{1}{\frac{(n+1)y-n}{ny-(n-1)}} = 2 - \frac{ny - (n-1)}{(n+1)y - n} = \frac{(n+2)y - (n+1)}{(n+1)y - n}。$$

應用數學歸納法原理知原命題成立。 □

引理 2. 對 $1 \leq y \in \mathbb{R}$ 及 $n \in \mathbb{N}$, 下式成立:

$$[a_0, n, y] = (a_0 + 1, \tau^{n-1}, y + 1)。$$

證明. 先考慮 $n = 1$, 即有

$$(a_0 + 1, \tau^{1-1}, y + 1) = (a_0 + 1, y + 1) = a_0 + 1 - \frac{1}{y + 1}$$

$$= a_0 + \frac{y}{y+1} = a_0 + \frac{1}{1+\frac{1}{y}} = [a_0, 1, y]。$$

這裡, τ^0 表示沒有中介的 2。

對 $2 \le n \in \mathbb{N}$, 有

$$\begin{aligned}
(a_0+1, \tau^{n-1}, y+1) &= \left(a_0+1,\ \tau^{n-1} - \frac{1}{y+1}\right) \\
&= \left(a_0+1,\ \frac{n(y+1)-(n-1)}{(n-1)(y+1)-(n-2)}\right) \quad (\text{由 引理 } 1) \\
&= a_0 + 1 - \frac{(n-1)(y+1)-(n-2)}{n(y+1)-(n-1)} \\
&= a_0 + \frac{n(y+1)-(n-1)-(n-1)(y+1)+(n-2)}{n(y+1)-(n-1)} \\
&= a_0 + \frac{y}{(ny+1)-(n-1)} \\
&= a_0 + \frac{1}{\frac{n(y+1)-(n-1)}{y}} \\
&= a_0 + \frac{1}{\frac{ny+1}{y}} \\
&= a_0 + \frac{1}{n+\frac{1}{y}} \\
&= [a_0, n, y]\ 。
\end{aligned}$$

注意 $y \ge 1$ 保證了對 $n \in \mathbb{N}$, $n(y+1)-(n-1) \neq 0$, 故原命題得證。 □

下列的兩定理給提問一及二以完滿的答案。

定理 4. 設 $\theta \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, 若 $\theta = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...]$, 則

$$\theta = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...] = (a_0+1, \tau^{a_1-1}, a_2+2, \tau^{a_3-1}, a_4+2, \tau^{a_5-1}, a_6+2, \ldots)\ 。$$

證明. 設

$$\theta = [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...] = [a_0, a_1, \theta_2]\ 。$$

由引理 2 及記號 3, 得

$$\theta = (a_0+1, \tau^{a_1-1}, \theta_2+1)。$$

但

$$\theta_2+1=[a_2+1,a_3,\theta_4],$$

同理

$$\theta_2+1=(a_2+2,\tau^{a_3-1},\theta_4+1)。$$

從而,

$$\theta=(a_0+1,\tau^{a_1-1},a_2+2,\tau^{a_3-1},\theta_4+1,\ldots),$$

如此繼續下去, 便可推得等式成立。 □

由定理 4, 我們得到無理數的 Neg 及 Reg 表示關係式。對於有理數的 Neg 及 Reg 表示關係式, 則由以下定理給出。

定理 5. 設 $\theta\in\mathbb{Q}$ 及 m 爲非負整數,

(I) 若 $\theta=[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{2m}]$ 及 $a_{2m}>1$, 則

$$[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{2m}]=(a_0+1,\tau^{a_1-1},a_2+2,\ldots,a_{2m-2}+2,\tau^{a_{2m-1}-1},a_{2m}+1)$$

成立。

(II) 若 $\theta=[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{2m+1}]$ 及 $a_{2m+1}>1$, 則有

$$[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{2m+1}]=(a_0+1,\tau^{a_1-1},a_2+2,\ldots,a_{2m}+2,\tau^{a_{2m+1}-1})$$

成立。

證明. 先考慮偶數的情況. 利用與定理 4 的證明一般的方法, 我們有

$$[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{2m}]=(a_0+1,\tau^{a_1-1},a_2+2,\ldots,\theta_{2m-2}+1)。$$

但

$$\theta_{2m-2}+1=[a_{2m-2}+1,a_{2m-1},a_{2m}]=(a_{2m-2}+2,\tau^{a_{2m-1}-1},a_{2m}+1),$$

故得

$$[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{2m}]=(a_0+1,\tau^{a_1-1},a_2+2,\ldots,a_{2m-2}+2,\tau^{a_{2m-1}-1},a_{2m}+1)。$$

對於奇數的情況, 我們有

$$[a_0,a_1,a_2,\ldots,a_{2m+1}]=[a_0,a_1,a_2,\ldots,\theta_{2m-2}]。$$

注意到

$$\theta_{2m-2}=[a_{2m-2},a_{2m-1},\theta_{2m}]=(a_{2m-2}+1,\tau^{a_{2m-1}-1},\theta_{2m}+1)。$$

故得,

$$\begin{aligned}\theta_{2m}+1&=(a_{2m}+1)+\frac{1}{a_{2m+1}}=(a_{2m}+2)-\left(1-\frac{1}{a_{2m+1}}\right)\\&=(a_{2m}+2)-\left(\frac{a_{2m+1}-1}{a_{2m+1}}\right)=(a_{2m}+2)-\left(\frac{1}{\frac{a_{2m+1}}{a_{2m+1}-1}}\right)\\&=(a_{2m}+2)-\left(\frac{1}{\frac{a_{2m+1}}{(a_{2m+1}-1)}}\right)\\&=(a_{2m}+2,\tau^{a_{2m+1}-1})\qquad(\text{由引理}1)。\end{aligned}$$

故原命題得證。 □

3. 實數的 Reg 表示式

有了實數的 Neg 及 Reg 表示關係式, 我們便可作以下的推斷:

(i) 設 θ 爲有理數, 由定理 2 知 θ 的 Reg 表示式爲有限, 再利用定理 5 得 θ 的 Neg 表示式亦爲有限;

(ii) 對有限的Neg 表示式, 明顯的, 通過有限步的計算, 表示式將可化爲有理數;

(iii) 設 θ 爲無理數, 由定理 2 知 θ 的 Reg 表示式爲無限, 再利用定理 4 得 θ 的 Neg 表示式亦爲無限。

上述觀察, 令人推想實數的 Neg 的表達式會與 Reg 有相同的性質, 亦即以下定理成立。

定理 6. 一實數爲

1. 有理數當且僅當它的 Neg 表示是有限的;
2. 無理數當且僅當它的 Neg 表示是無限的。

由上述的推斷, 要證明這定理, 即要證明:

命題 1. 對任意的無限 Neg 表示式, 它將收斂於一無理數。

事實上, 更一般的定理成立:

定理 7. 對無窮連分數表達式

$$a_0 - \cfrac{b_1}{a_1 - \cfrac{b_2}{a_2 - \cfrac{b_3}{a_3 - \ddots - \cfrac{b_\ell}{a_\ell - \ddots}}}}$$

若 $\forall i$, a_i 及b_i 爲正整數, 且對充分大的 i, a_i 及b_i 滿足

$$a_i \geq b_i + 1$$

則無窮連分數表達式收斂且其值爲一無理數。

(取 $b_i = 1$ 並注意 $a_i \geq 2 = b_1 + 1 = 2$, 即得命題 1。)

要討論上述定理的證明, 將遠遠超出本文的範圍。有興趣的讀者可參閱 David Angell 的網上筆記[8], 內裏有非常清楚詳盡的證明解說。值得注意的是 David Angell 所提供的證明方法是考慮當$n \to \infty$ 時, 無窮連分數表達式的第 n 個漸近分數 (n-th convergent) 的收斂性。這種利用無窮連分數表示式去證明實數是否無理數或超越數 (transcendental number) 的方法, 是大數學家 J.H. Lambert 及 L. Euler 所開創並爲後來數論工作者所沿用的, 是十分值得學習的方法。

至此, 我們可以得到蔡聰明教授所提供有關 $\sqrt{2}$是無理數的 18 個證明 (參閱 [12]) 以外的另一個證明: 因爲 $\sqrt{2}$ 有無窮 Neg 表示式

$$\sqrt{2} = (2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, \ldots) = (2, \overline{2, 4}),$$

故 $\sqrt{2}$ 是無理數!

4. 一點感想

「教學相長」是每一個教師都能深切體會的話。學生與教師在教學過程中均會有所得, 而數學教學過程所引發的解難與探究的活動, 更是學生與教師所不容錯過的。蕭文強教授曾在《「三心兩意」的數學教師》(參閱 [11]) 一文中指出數學教師必須培養好奇心, 樂於學習, 慣於反思,

[8]註: David Angell: Chapter 7 of Lecture Notes for MATH5535 - Irrationality and Transcendence, http://www.maths.unsw.edu.au/~angell/5535/chapter7.ps

更勉勵數學教師要多從事數學的解難與探究, 並指出數學研究工作者與數學教師對解難與探究內容和性質的異同:

數學研究工作者	中小學數學教師
問題處於某學術領域的前沿	問題源自教學上的需要
在文獻上通常找不到答案	在文獻上可能找到也可能找不到答案
儘量討論問題的一般表述形式	往往只著意討論問題的特殊情況
儘量尋找一般的解答	有時對尋找具體的解答更感興趣
設法運用任何數學知識和技巧	只能運用某些範圍內的數學知識和技巧
優美的解答是追求的一項準則	優美的解答不一定是追求的準則

筆者作爲師訓培育的大專院校數學教師, 角色更爲有趣, 在穿梭往來於大學講堂與中小學課室之間, 在輔導與陪伴著不少的現職與未來數學教師成長之餘, 固然也希望他們可多從事數學的解難與探究, 但很多時卻會感到, 作爲輔導者的自己, 也往往「 黔驢技窮 」, 未能爲他們提供有趣及值得探究的題材。想不到由學生的一個簡單的問題, 會引發師生的一連串有趣的解難與探究。其間, 學生更告訴筆者 Alex Eustis 在美國加州 Harvey Mudd College 的數學碩士論文中 [1], 應用了組合數學的密鋪模型去分析 Reg 與 Neg 的關係, 這也是一個非常有趣及值得探究的方向。這更令得筆者感受到中小學數學教師的解難與探究很多時會發展爲數學研究工作者的解難與探究, 兩者是密切關聯著的, 這正是「教學相長」之謂也!

蕭教授在同一文章中也提到, 早在一個世紀之前, 數學家克萊因 (Felix Klein) 曾說過一段語重心長的話[9] :「 大學新生入學一開始就發現他面對的『數學 』問題好像跟中學裏學過的東西一點也沒有聯繫, 自然他很快便完全忘記了中學裏學過的東西。畢業後他當上了教師, 突然發覺自己被要求依循老套的方法講授傳統的初等數學。由於缺乏別人的指導, 他難以辨明當前的數學內容和他曾學到的高等數學有什麼聯繫, 於是他很快便接受了這套由來已久的教學方式。他的大學教育頂多成爲一種愉快回憶, 但對他的教學毫無影響。」

我想, 我的學生, 他們作爲未來的數學教師, 在自己的提問引導下, 雖然不一定會在數學上有什麼新的創造, 但通過 Reg 與 Neg 的探究, 他們對連分數的歷史發展, 會有更深的體會, 對於未來走數學教師的路, 會更有信心!

[9]註: 這是 Felix Klein 爲名著: Klein, F., (1908, 1909 & 1928), *Elementarmathematik vom höeren Standpunkt aus (3 Bande)*, Leipzig: B. G. Teubner, 1908, 1909, Berlin: Springer 1928 所寫前言中的一段。引文取自: Felex Klein 著, 舒湘芹, 陳義章、楊欽樑等譯,(1996),《高觀點下的初等數學》 第一卷, 台北市 : 九章出版社。(它是根據英譯本: Klein, F. (1908/1939). Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Part I: Arithmetic, Algebra, Analysis. Translated by E. R. Hedrick and C. A. Noble. New York: Dover Publications 翻(中) 譯的。)

希望我們這篇小小的文章, 可「 拋磚引玉 」, 讓數學研究工作者、數學教師以及學生進行更多數學的解難與探究!

參考文獻

1. Eustis, Alex,(2006),*The Negs and Regs of Continued Fractions*, CA: Master Thesis at Harvey Mudd College.
2. Fowler, D. H.,(1999),*The Mathematics of Plato's Academy : A New Reconstruction*, 2nd edition, Oxford : Oxford University Press.
3. Khinchin, A. Ya.,(1997), *Continued Fractions*, Mineola, N.Y. : Dover Publications.
4. Kline, Morris,(1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford : Oxford University Press.
5. Knorr, W. R.,(1975), *The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht and Boston: D. Reidel.
6. Rosen, Kenneth H., (2005), *Elementary Number Theory and its Applications*, 5th Edition, Reading, Mass. : Addison-Wesley.
7. Lorentzen, L. and Waadeland, H., (1992),*Continued Fractions with Applications*, New York : North-Holland.
8. Brezinski, Claude,(1980), *History of Continued Fractions and Pade Approximants*, New York : Springer-Verlag.
9. Olds, C.D., (1963), *Continued Fractions*, Random House.
10. 華羅庚, (1957),《數論導引》, 北京 : 科學出版社。
11. 蕭文強, (2009),〈「三心兩意」的數學教師 〉,《心中有數》, 台北市 : 九章出版社。
12. 蔡聰明, (1999),〈 $\sqrt{2}$ 爲無理數的證明 〉,《數學傳播》, 23 卷 1 期, 民 88 年 3 月。

—本文作者任教香港教育學院數學與資訊科技學系—