

# 對於「神奇的冪和三角形」一文的回響

廖信傑

## 1. 引言

數學傳播 35 卷 2 期「神奇的冪和三角形」中, 簡若竹等三人 [2], 由冪和三角形之係數  $d(k, i)$  的定義 — 連續整數的冪次和與  $d(k, i)$  間的關係

$$\sum_{i=0}^n j^k = \sum_{i=0}^k d(k, i) \binom{n}{i+1}$$

得到冪和三角形係數  $d(k, i)$  的兩個有趣的性質, 並利用數學傳播 31 卷 3 期中, 蘇益弘等三人定義之連續整數冪次和擴充函數  $S_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  及  $d(k, i)$  的關係式得到一種利用  $d(k, i)$  計算 Bernoulli 數的方法。

本文的目的是證明  $d(k, i) = i!S(k+1, i+1)$ , 其中  $S(k, i)$  表第二類 Stirling 數。然後利用這個結果將原文以第二類 Stirling 數表示, 並由原文中 Bernoulli 數和  $d(k, i)$  的關係式將 Bernoulli 數和第二類 Stirling 數連繫在一起。

## 2. 第二類 Stirling 數和 $d(k, i)$ 的關係

首先, 我們先介紹一些第二類 Stirling 數的性質

- 對任意整數  $n \geq 0$ ,

$$S(n+1, k+1) = S(n, k) + (k+1)S(n, k+1) \quad (1)$$

- 對任意整數  $n \geq 1$ ,

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j (k-j)^n \binom{k}{j} \quad (2)$$

- 對任意整數  $n \geq 1$ ,  $S(n, 1) = S(n, n) = S(0, 0) = 1$   
對任意  $0 \leq n < m$ ,  $S(n, m) = 0$

這些性質的證明請參考 R. Merris[1]。

以下，我們用上述的性質 (1) 及 (2) 來證明 [2] 中的性質 2.1 及性質 2.2, 在此之前，我們先給出一個引理。

引理.

$$\sum_{i=0}^n j^k = \sum_{i=1}^k i!S(k, i) \binom{n+1}{i+1}$$

證明. 請參閱 [1, p.131]

□

定理 1. 對所有整數  $k \geq 0$  及  $i \geq 0$ , 我們有  $d(k, i) = i!S(k+1, i+1)$ 。

證明. 由上述引理,

$$\sum_{i=0}^n j^k = \sum_{i=1}^k i!S(k, i) \binom{n+1}{i+1}$$

由 Pascal 恆等式,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^k i!S(k, i) \binom{n+1}{i+1} = \sum_{i=1}^k i!S(k, i) \left[ \binom{n}{i+1} + \binom{n}{i} \right] \\ &= \sum_{i=1}^k i!S(k, i) \binom{n}{i+1} + \sum_{i=1}^k i!S(k, i) \binom{n}{i} \\ &= \sum_{i=1}^k i!S(k, i) \binom{n}{i+1} + \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)!S(k, i+1) \binom{n}{i+1} \\ &= \left( \sum_{i=1}^{k-1} i!S(k, i) \binom{n}{i+1} + k!S(k, k) \binom{n}{k+1} \right) \\ & \quad + \left( 1!S(k, 1) \binom{n}{1} + \sum_{i=1}^{k-1} (i+1)!S(k, i+1) \binom{n}{i+1} \right) \\ &= 1!S(k, 1) \binom{n}{1} + \sum_{i=1}^{k-1} i!(S(k, i) + (i+1)S(k, i+1)) \binom{n}{i+1} + k!S(k, k) \binom{n}{k+1} \\ &= 1!S(k+1, 1) \binom{n}{1} + \sum_{i=1}^{k-1} i!S(k+1, i+1) \binom{n}{i+1} + k!S(k+1, i+1) \binom{n}{k+1} \text{ (由(1))} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^k i! S(k+1, i+1) \binom{n}{i+1}$$

$$\text{即 } \sum_{i=0}^n j^k = \sum_{i=0}^k i! S(k+1, i+1) \binom{n}{i+1}$$

$$\text{又因 } \sum_{i=0}^n j^k = \sum_{i=0}^k d(k, i) \binom{n}{i+1} \text{ 故}$$

$$\sum_{i=0}^k i! S(k+1, i+1) \binom{n}{i+1} = \sum_{i=0}^k d(k, i) \binom{n}{i+1}$$

即得  $d(k, i) = i! S(k+1, i+1)$ 。 □

利用定理 1, 我們將說明原文中性質 2.1 事實上是第二類 Stirling 數的性質 (1)。已知原文性質 2.1:

$$d(k, i) = id(k-1, i-1) + (i+1)d(k-1, i)$$

由定理 1, 上式可表成

$$i! S(k+1, i+1) = i(i-1)! S(k, i) + (i+1)i! S(k, i+1)$$

等號兩邊同除  $i!$  得

$$S(k+1, i+1) = S(k, i) + (i+1)S(k, i+1)$$

這就是第二類 Stirling 數的性質 (1)。

同理, 原文的性質 2.2 其實也是第二類 Stirling 數的性質 (1) 及性質 (2)。

已知原文性質 2.2: 對所有  $0 \leq i \leq k-1$ , 有

$$d(k, i) = \sum_{j=0}^i (-1)^j (i-j)^k \binom{i}{j} + \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j (i-j+1)^k \binom{i+1}{j} \quad (3)$$

當  $i = k$  時, 有

$$d(k, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j (k-j)^k \binom{k}{j} \quad (4)$$

先看  $0 \leq i \leq k-1$ , (3) 式等號兩邊同除  $i!$  得

$$\frac{1}{i!} d(k, i) = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^j (i-j)^k \binom{i}{j} + \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j (i-j+1)^k \binom{i+1}{j}$$

$$= \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^j (i-j)^k \binom{i}{j} + \frac{i+1}{(i+1)!} \sum_{j=0}^{i+1} (-1)^j (i-j+1)^k \binom{i+1}{j}$$

由第二類 Stirling 數性質 (2),

$$\frac{1}{i!} d(k, i) = S(k, i) + (i+1)S(k, i+1)$$

再由定理 1,

$$S(k+1, i+1) = S(k, i) + (i+1)S(k, i+1)$$

而當  $i = k$  時, (4) 式等號兩邊同除  $k!$ , 再由定理 1 得

$$\frac{1}{k!} d(k, k) = S(k+1, k+1) = S(k, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j (k-j)^k \binom{k}{j}$$

### 3. Bernoulli 數之另一表示法

原文中關於 Bernoulli 數的一結論是:

對任意自然數  $k$ ,

$$B_{2k} = \sum_{i=0}^{2k} d(2k, i) \frac{d}{dx} \binom{x}{i+1} \Big|_{x=-1} \quad (5)$$

以下我們利用  $S(k, i)$  對這個結果進行改寫。

定理 2.

$$\frac{d}{dx} \binom{x}{n} \Big|_{x=-1} = (-1)^{n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

證明.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \binom{x}{n} \Big|_{x=-1} &= \frac{d}{dx} \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!} \frac{d}{dx} x(x-1)\dots(x-n+1) \Big|_{x=-1} \\ &= \frac{1}{n!} (-1)^{n-1} \left( \frac{n!}{1} + \frac{n!}{2} + \dots + \frac{n!}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n!} (-1)^{n-1} n! \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \\ &= (-1)^{n+1} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \quad \square \end{aligned}$$

利用定理 1 及定理 2, 我們可以將 (5) 式改寫如下:

$$B_{2k} = \sum_{i=0}^{2k} i! S(2k+1, i+1) (-1)^i \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{i+1} \right) \quad (6)$$

註. (6) 式可繼續用第一類 Stirling 數  $s(k, i)$  表示成

$$B_{2k} = \sum_{i=0}^{2k} \frac{1}{i+1} S(2k+1, i+1) s(i+2, 2)$$

關於第一類 Stirling 數  $s(k, i)$  的定義請參閱 [1]。

### 致謝

感謝中研院數學所暑期離散及組合數學專題計畫的資助, 讓筆者有機會在暑假跟隨美國內華達大學數學系薛昭雄教授做暑期研究, 也由衷感謝薛昭雄教授的指導, 因為薛教授的鼓勵和建議, 本文才能完稿。

### 參考文獻

1. R. Merris, *Combinatorics*, (second edition), John Wiley & sons, New Jersey, 2003.
2. 簡若竹、柯明錦、胡豐榮(2011), 神奇的冪和三角形, 數學傳播, 第35卷2期, 45-50.

—本文作者為交通大學應用數學系學生—

## 國科會科教處數學教育學門 2011 年活動

### 2011台灣數學教育論文發表工作坊

第二階段工作坊日期: 2011年11月25日 (星期五)

其他相關資訊: 詳細情形請查詢台灣數學教育學會網頁

<http://163.21.236.74/article.asp?id=66>