數學傳播 35卷4期, pp. 86-90

# 構造切線證明一類對稱不等式

周　斌

不等式與函數雖是兩個不同概念, 但兩者是緊密聯繫的, 用函數的思想來處理不等式的問題, 也是證明不等式問題的常見方法。如通過構造函數, 研究函數的單調性來證明不等式, 或用函數的凹凸性證明不等式等等。本文通過構造函數的切線來證明一類對稱不等式, 利用限制條件的平均值其所對應函數圖形上的點, 求過此點的切線, 觀察函數的圖形是在切線的上方 (或下方) 來證明不等式, 或決定函數的最大值 (或最小值)。以下先從一個求函數最小值問題說起。

**例**1: 設 $x,y,z$ 均是正實數, 且 $x+y+z=1$, 求三元函數 $f(x,y,z)=\dfrac{3x^2-x}{1+x^2}+\dfrac{3y^2-y}{1+y^2}+\dfrac{3z^2-z}{1+z^2}$ 的最小值, 並給出證明。(2003湖南省數學競賽題)

**解**: 對於 $0<x<1$ 我們先證明 $\dfrac{3x^2-x}{1+x^2}\geq\dfrac{9x-3}{10}$ (1), 此式等價於 $9x^3-33x^2+19x-3\leq 0\Leftrightarrow(3x-1)^2(x-3)\leq 0$, 此式顯然成立。同理有 $\dfrac{3y^2-y}{1+y^2}\geq\dfrac{9y-3}{10}$ (2), $\dfrac{3z^2-z}{1+z^2}\geq\dfrac{9z-3}{10}$ (3), 三式相加得, $f(x,y,z)=\dfrac{3x^2-x}{1+x^2}+\dfrac{3y^2-y}{1+y^2}+\dfrac{3z^2-z}{1+z^2}\geq\dfrac{9(x+y+z)-9}{10}=0$ 當且僅當 $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ 時, $f(x,y,z)=0$, 故所求的最小值爲 0。

這裏我們要思考的是 $f(x)=\dfrac{3x^2-x}{1+x^2}$ 與 $g(x)=\dfrac{9x-3}{10}$ 有什麼關係? 借助幾何畫板工具, 通過研究函數圖像不難發現 $g(x)=\dfrac{9x-3}{10}$ 是函數 $f(x)=\dfrac{3x^2-x}{1+x^2}$ 在 $x=\dfrac{1}{3}$ 的切線, 且是 $f(x)$ 的下界函數, 故可用 $g(x)$ 來估計 $f(x)$。這爲我們證明這類不等式提供了方法。

**例**2: 設 $a,b,c,d>0$ 且 $a+b+c+d=1$, 證明: $6(a^3+b^3+c^3+d^3)\geq a^2+b^2+c^2+d^2+\dfrac{1}{8}$ (2005 第 8 屆香港數學奧林匹克)

**證明**: 設 $f(x)=6x^3-x^2$, 原不等式即爲 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\geq\dfrac{1}{8}$, 其中 $a,b,c,d>0$

且 $a+b+c+d=1$。$f(x)=6x^3-x^2$ 在 $x=\frac{1}{4}$ 的切線爲 $y=\frac{5}{8}x-\frac{1}{8}$, 下面證明 $f(x)\geq\frac{5}{8}x-\frac{1}{8}$, 即 $6x^3-x^2\geq\frac{5}{8}x-\frac{1}{8}$ 此式等價於 $(4x-1)^2(3x+1)\geq 0$ 當 $0<x<1$ 時, 此不等式 顯然成立, 所以 $f(a)\geq\frac{5}{8}a-\frac{1}{8}$, $f(b)\geq\frac{5}{8}b-\frac{1}{8}$, $f(c)\geq\frac{5}{8}c-\frac{1}{8}$, $f(d)\geq\frac{5}{8}d-\frac{1}{8}$, 所以 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)\geq\frac{5(a+b+c+d)-4}{8}=\frac{1}{8}$, 這證明了所需的結論。 □

通過以上的證明經驗, 我們可以發現在證明形如 $\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geq M$ (或 $\leq M$) 且滿足 $\sum_{i=1}^{n}X_i=S$ 的對稱不等式時, 可以構造在 $X_i$ 的均值 $x=\frac{s}{n}$ 點的切線 $g(x)$, 即用 $g(x)$ 來估計 $f(x)$ 的值, 然後比較 $g(x)$ 與 $f(x)$ 的大小, 從而獲得不等式的證明。

**例**3: 已知正數 $a,b,c$ 滿足 $a+b+c=3$, 求證: $\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(b+a)^2}\leq 5$ (2006 第 2 屆北方數學奧林匹克)

**證明**: 設 $f(x)=\frac{x^2+9}{2x^2+(3-x)^2}$, 即 $f(x)=\frac{x^2+9}{3x^2-6x+9}$ 在 $x=1$ 處的切線爲 $g(x)=\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$ 下面證明當 $0<x<3$ 時, $f(x)\leq g(x)$, 即 $\frac{x^2+9}{3x^2-6x+9}\leq\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$, 此式等價於 $3(x^2+9)\leq(x+4)(3x^2-6x+9)\Leftrightarrow x^3+x^2-5x+3\geq 0\Leftrightarrow(x+3)(x-1)^2\geq 0$, 顯然成立。所以 $\frac{a^2+3}{2a^2+(3-1)^2}\leq\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}$, 即 $\frac{a^2+3}{2a^2+(b+c)^2}\leq\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}$, 同理有 $\frac{b^2+3}{2b^2+(a+c)^2}\leq\frac{1}{3}b+\frac{4}{3}$, $\frac{c^2+3}{2c^2+(a+b)^2}\leq\frac{1}{3}c+\frac{4}{3}$, 上述三式相加可得,

$$\frac{a^2+9}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2+9}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{c^2+9}{2c^2+(b+a)^2}\leq\frac{1}{3}(a+b+c)+4=5$$ □

**例**4: 設 $x_i>0$, $(i=1,2,3,4,5)$ 且 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}=1$, 求證: $\sum_{i=1}^{5}\frac{x_i}{4+x_i^2}\leq 1$ (2003中國西部數學奧林匹克題)

**證明**: 作變換設 $\frac{1}{1+x_i}=a_i$ 且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$ $(i=1,2,3,4,5)$, 則不等式轉化爲

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{\frac{1}{a_i}-1}{4+\left(\frac{1}{a_i}-1\right)^2}\leq 1 \quad 即 \quad \sum_{i=1}^{5}\frac{-a_i^2+a_i}{5a_i^2-2a_i+1}\leq 1,$$

設 $f(x)=\dfrac{-x^2+x}{5x^2-2x+1}$, 計算 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{5}$ 處的切線爲 $g(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{20}$, 下面證明 $f(x)\le g(x)$, 即 $\dfrac{-x^2+x}{5x^2-2x+1}\le\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{20}$, 因爲 $5x^2-2x+1>0$, 此式等價於

$20(-x^2+x)\le(15x+1)(5x^2-2x+1)\Leftrightarrow 75x^3-5x^2-7x+1\ge 0\Leftrightarrow(3x+1)(5x-1)^2\ge 0$,

當 $0<x<1$ 時, 此不等式顯然成立。所以

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{-a_i^2+a_i}{5a_i^2-2a_i+1}\le\sum_{i=1}^{5}\Big(\frac{3}{4}a_i+\frac{1}{20}\Big)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1 \qquad \square$$

**例**5: 設 $a,b,c$ 是正實數, 求證: $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\dfrac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\dfrac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\le 8$ (2003美國數學奧林匹克試題)

**證明**: 爲了證明此題, 我們注意到以下事實, 將 $a,b,c$ 換成 $\dfrac{a}{a+b+c}$, $\dfrac{b}{a+b+c}$, $\dfrac{c}{a+b+c}$, 不等式不變, 所以可設

$0<a,b,c<1,\quad a+b+c=1$, 則, $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}=\dfrac{(a+1)^2}{2a^2+(1-a)^2}=\dfrac{(a+1)^2}{3a^2-2a+1}$

設 $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{3x^2-2x+1}$, 在 $x=\dfrac{1}{3}$ 點的切線爲 $g(x)=\dfrac{12x+4}{3}$, $f(x)-g(x)=\dfrac{-36x^3+15x^2+2x-1}{3(3x^2-2x+1)}=\dfrac{-(3x-1)^2(4x+1)}{3(3x^2-2x+1)}\le 0$ 當 $0<x<1$ 時, 此不等式成立, 所以, $\dfrac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}\le\dfrac{12a+4}{3}$, 同理,

$$\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}\le\frac{12b+4}{3},\qquad \frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\le\frac{12c+4}{3},$$

上式相加便得,

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(a+2b+c)^2}{2b^2+(a+c)^2}+\frac{(a+b+2c)^2}{2c^2+(b+a)^2}\le\frac{12(a+b+c)+3\times 4}{3}=8 \quad \square$$

**例**6: 設 $0<\alpha,\beta,\gamma<\dfrac{\pi}{2}$, 且 $\sin^3\alpha+\sin^3\beta+\sin^3\gamma=1$ 求證: $\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\ge\dfrac{3}{\sqrt[3]{9}-1}$ (2005中國東南地區數學奧林匹克競賽試題的加強)

**證明**: 令 $x=\sin^3\alpha$, $y=\sin^3\beta$, $z=\sin^3\gamma$ 則不等式等價於在 $0<x,y,z$ 且 $x+y+z=1$ 的條件下, 證明

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{1-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{y^2}}{1-\sqrt[3]{y^2}}+\frac{\sqrt[3]{z^2}}{1-\sqrt[3]{z^2}}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{9}-1},$$

設 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{1-\sqrt[3]{x^2}}$, 在 $f(x)=\dfrac{1}{3}$ 處的切線

$$y=\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\Big[1-\sqrt[3]{(\frac{1}{3})^2}\Big]^2}(x-\frac{1}{3})+\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2}{1-\sqrt[3]{(\frac{1}{3})^2}}$$

下面證明當 $0<x<1$ 時,

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{1-\sqrt[3]{x^2}}\geq\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\Big[1-\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\Big]^2}(x-\frac{1}{3})+\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2}{1-\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}}\tag{1}$$

令 $p=\sqrt[3]{x}$, $q=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, 則 $0<p$, $q<1$, 於是

$$\begin{aligned}
(1)\text{ 式}\Leftrightarrow&\frac{p^2}{1-p^2}-\frac{q^2}{1-q^2}\geq\frac{2(p^3-q^3)}{3q(1-q^2)^2}\\
\Leftrightarrow&\frac{p^2-q^2}{(1-p^2)(1-q^2)}\geq\frac{2(p^3-q^3)}{3q(1-q^2)^2}\\
\Leftrightarrow&3q(1-q^2)^2(p^2-q^2)\geq 2(p^3-q^3)(1-p^2)(1-q^2)\\
\Leftrightarrow&(p-q)^2(1-q^2)[(2p^3+4p^2q)+(3q^2-1)(2p+q)]\geq 0
\end{aligned}$$

而 $1-q^2>0$, $(p-q)^2>0$, $(2p^3+4p^2q)+(3q^2-1)(2p+q)>0$ 所以 (1) 式成立, 當且僅當 $p=q$ 時, 等號成立, 此時 $x=\dfrac{1}{3}$, 故

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{x^2}}{1-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{\sqrt[3]{y^2}}{1-\sqrt[3]{y^2}}+\frac{\sqrt[3]{z^2}}{1-\sqrt[3]{z^2}}&\geq\frac{2}{3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\Big[1-\sqrt[3]{(\frac{1}{3})^2}\Big]^2}(x+y+z-\frac{1}{3})+\frac{3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^2}{1-\sqrt[3]{(\frac{1}{3})^2}}\\
&=\frac{3}{\sqrt[3]{9}-1}
\end{aligned}$$

當且僅當 $x=y=z=\dfrac{1}{3}$ 時, 等號成立, 從而原不等式成立。 $\square$

可以看到, 利用切線在證明這類對稱不等式非常有效, 在不等式中大量存在這些形式對稱不等式, 讀者不妨一試。

## 參考文獻

1. 蔣明斌, 通過構造“零件不等式”證明不等式[J], 中學數學研究 (廣東) 2008, 7。
2. 蔡玉書, 數學奧林匹克中的不等式研究, 蘇州大學出版社, 2007年9月。

—本文作者任教中國浙江省岱山縣東沙中學—